



NAVIGOINNIN MENETELMÄT

Johdatus teknologiseen
navigointiin

Martin Vermeer



Navigoinnin menetelmät

Johdatus teknologiseen navigointiin

Martin Vermeer

Aalto-yliopiston julkaisusarja
TIEDE + TEKNOLOGIA 6/2020

© 2020 Martin Vermeer

ISBN 978-952-64-0207-9 (pdf)

ISSN 1799-4888 (pdf)

<http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-64-0207-9>

Helsinki 2020

Tekijä

Martin Vermeer

Julkaisun nimi

Navigoinnin menetelmät – Johdatus teknologiseen navigointiin

Julkaisija Insinööritieteiden korkeakoulu**Yksikkö** Rakennetun ympäristön laitos**Sarja** Aalto University publication series TIEDE + TEKNOLOGIA 6/2020**Tutkimusala** Maanmittausoppi**Kieli** suomi**Tiivistelmä**

Ihminen on historian aikana aina navigoinut. Teknologinen navigointi syntyi merenkulussa, koska avomerellä tarvittiin mittauksia oman sijainnin määrittämiseksi.

Lentokoneet, ohjukset ja avaruusalukset sekä kuivalla maalla liikkuvat kulkuneuvot ja jopa jalankulkijat kaikki ”navigoivat” nykYTEKNOLOGIOIDEN avulla. Kehitys on pääosin kahden teknologian ansiota: satelliittipaikannuksen, kuten GPS:n (Global Positioning System), ja inertianavigoinnin. Myös tieto- ja viestintätekniikka on kehittynyt, erityisesti rekursiivinen lineaarinen suodatus eli Kalmanin suodin. Lisäksi pienet ja hinnaltaan huokeat digitaaliset anturit ovat mullistamassa jokapäiväisen navigoinnin.

Tässä kirjassa käsiteltäviä aiheita ovat navigoinnin perusteet, stokastiset prosessit, Kalmanin suodin, inertianavigoinnin teknologiat ja menetelmät, GNSS-signaalien rakenne, kantoaallon vaihemittaukset ja kokonaistuntemattomat, tosiaikainen GNSS-paikannus ja navigointi, differentiaalikorjausten viestintäratkaisut ja standardit, GNSS-tukiasemat ja -verkot, satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät, ilmagravimetria sekä anturifuusio ja sattuman anturit.

Avainsanat navigointi, teknologinen navigointi, merenkulku, ilmailu, raketit, ohjukset, lentokoneet, avaruusalukset, satelliittipaikannus, inertianavigointi, stokastiset prosessit, Kalmanin suodin, globaaliset navigointisatelliittijärjestelmät, kantoaallon vaihe, kokonaistuntemattomat, pseudosatunnaiskoodit, tosiaikainen kinemaattinen GNSS-paikannus, differentiaali GNSS-paikannus, satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät, ilmagravimetria, anturifuusio, sattuman anturit.

ISBN (pdf) 978-952-64-0207-9**ISSN (PDF)** 1799-4888**Julkaisupaikka** Helsinki**Painopaikka** Helsinki**Vuosi** 2020**Sivumäärä** 344**urn** <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-64-0207-9>

Esipuhe

Kansikuva: Navigointi ei ole ihmisen keksintö. Lapintiira (*Sterna paradisaea*) lentää joka vuosi arktiselta alueelta Eteläiselle jäämerelle ja takaisin.

Egevang ym. (2010)

Olen opettanut tätä kurssia vuosina 2001–2010 Teknillisessä korkeakoulussa ja 2010–2015 Aalto-yliopistossa. Kurssi oli osa paikannuksen ja navigoinnin, geomatiikan sekä geoinformatiikan koulutusohjelmia. Kurssin ajatuksena oli antaa geospaatialisten tieteiden opiskelijoille perustiedot tosiaikaisen paikannuksen taustalla olevista teknologioista ja menetelmistä sekä niiden käytöstä navigoinnissa maalla ja merellä, ilmassa ja avaruudessa.

Kurssin pääaiheita ovat navigoinnin perusteet, stokastiset prosessit, Kalmanin suodin, inertianavigoinnin teknologiat ja menetelmät, GNSS-signaalien rakenne, kantoaallon vaihemittaukset ja kokonaistuntemattomat, tosiaikainen GNSS-paikannus ja navigointi, differentiaalikorjausten viestintäratkaisut ja standardit, GNSS-tukiasemat ja -verkot, satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät, ilmagravimetria sekä anturifuusio ja sattuman anturit.

Helsingissä 4. joulukuuta 2020

Martin Vermeer

Kiitokset

Susanna Nordsten laati vuonna 2002 käsikirjoituksen varhaisen englanninnoksen käyttäen LyXin ”branches”-ominaisuuden prototyyppiä, joka on kuvattu täällä: [multilingual.pdf](#). Jukka Varonen ja Kimmo Penttilä auttoivat ilmailutermien kanssa. Keijo Inkilä toi esiin Woodburyn yhtälön.

Kielentarkistuksesta vastasi pätevästi Sanna Karppinen, Skarppi Kirjoituspalvelut. Liisa Vermeer antoi myös arvokkaita kielihuomautuksia. Kannen suunnitteli Hanna Sario Unigrafia Creative:sta. Laura Mure ja Henri Linnanketo auttoivat julkaisemistyössä.


















Muutama karttakuva piirrettiin Generic Mapping Toolsin avulla ([Wessel ym., 2013](#)).

Tämä sisältö lisensoidaan lisenssillä *Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen* ([CC BY 4.0](#)), lukuunottamatta tekstissä mainittuja tai muuten ilmeisiä poikkeuksia.



Sisältö

Luvut

	1. Navigoinnin perusteet	1
	2. Stokastiset prosessit	15
	3. Kalmanin suodin	51
	4. Kalmanin suotimen esimerkkejä ja sovelluksia	75
	5. Inertianavigointi	97
	6. Navigointi ja rataaliike	133
	7. Satelliittinavigoinnin teknologiat	159
	8. Tosi aikaiset GNSS-havainnot	191
	9. RTK-navigointi	215
	10. Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät	235
	11. Satelliittinavigoinnin uusi aikakausi	253
	12. Painovoiman mittaus lennossa	265
	13. Anturifuusio ja sattuman anturit	275
	A. Tehon spektraalitiheys on ei-negatiivinen	295
	B. M-jonot ja Goldin koodit	297
	C. Woodburyn matriisiyhtälö	303
	D. Tosi aikaiset järjestelmät ja verkot	305

Esipuhe	i
---------	---

Kuvat	viii
-------	------

Taulukot	xi
----------	----

Lyhenteet	xiii
1. Navigoinnin perusteet	1
1.1 Johdanto	1
1.2 Historia	2
1.3 Kulkuneuvon liikkeet ja koordinaatistot	6
1.4 Geosentriset vertauskehykset	9
1.5 Ei-geosentriset vertauskehykset	10
1.6 Korkeuden vertaustaso	12
1.7 Peruskäsitteet ja teknologiat	12
Olenko ymmärtänyt tämän?	14
2. Stokastiset prosessit	15
2.1 Stokastiset muuttujat ja prosessit	15
2.2 Otoskeskiarvo	18
2.3 Kovarianssi ja korrelaatio	21
2.4 Aikasarjojen lineaarinen regressio	27
2.5 Stokastisen prosessin auto- ja ristikovarianssi	32
2.6 Valkoinen kohina ja satunnaiskulku	36
2.7 Värillinen kohina	39
2.8 Tehon spektraalitiheys (PSD)	43
Olenko ymmärtänyt tämän?	48
Harjoitus 2 – 1: Normaalijakauman normalisointi	49
Harjoitus 2 – 2: Tehollinen otoskoko	49
3. Kalmanin suodin	51
3.1 Tilavektori	53
3.2 Dynaaminen malli	55
3.3 Esimerkki: satelliitin rataliike	58
3.4 Diskreetti dynaaminen malli	61
3.5 Tilan varianssin differentiaaliyhtälö	65
3.6 Havaintomalli	68
3.7 Päivitys	70
3.8 Päivityksen optimaalisuus	72
Olenko ymmärtänyt tämän?	73



Harjoitus 3 – 1: Yksinkertainen, kaksiulotteinen dynaaminen malli	74
Harjoitus 3 – 2: Dynaamisen kohinan varianssin transitiivinen ominaisuus	74
4. Kalmanin suotimen esimerkkejä ja sovelluksia	75
4.1 Esimerkki 1: yksiulotteinen liike	75
4.2 Esimerkki 2: pyörivä pyörä	78
4.3 Esimerkki 3: laskuvarjohyppääjä	81
4.4 Realistisen tilastollisen käyttäytymisen mallintaminen .	83
4.5 Kalmanin suodin perättäisenä tasoituksena	84
4.6 Kalmanin suotimen käyttö ”kahdesta päästä”	86
Olenko ymmärtänyt tämän?	94
Harjoitus 4 – 1: Yksinkertainen Kalmanin suotimen esimerkki	94
Harjoitus 4 – 2: Hieman monimutkaisempi Kalmanin suotimen esimerkki	95
Harjoitus 4 – 3: Laskuvarjohyppääjä uudelleen	95
5. Inertianavigointi	97
5.1 Periaate	97
5.2 Inertialaitteen osat	99
5.3 Toteutus	109
5.4 Inertianavigointi kiinteän Maan järjestelmässä	112
5.5 Vakautettu alusta	117
5.6 Hyrräkompassi	118
5.7 Schulerin heiluri	120
5.8 Mekanisointi	125
5.9 Maan pinnalla kahdessa ulottuvuudessa	128
5.10 Inertialaitteen alustus	130
Olenko ymmärtänyt tämän?	131
Harjoitus 5 – 1: Tennismailalause	132
Harjoitus 5 – 2: Hyrräkompassin yhtälö	132
Harjoitus 5 – 3: Schulerin jakso	132

6. Navigointi ja rataliike	133
6.1 Keplerin rata	133
6.2 Hillin koordinaattien käyttö	142
6.3 Muunnos inertiaalisen ja Hillin koordinaatiston välillä	144
6.4 Keskeisvoimakentän sarjakehitelmä	145
6.5 Liikeyhtälöt Hillin koordinaatistossa	147
6.6 Hillin yhtälöiden ratkaiseminen	147
6.7 Toinen ratkaisu	150
6.8 Tilansiirtomatriisi	151
Olenko ymmärtänyt tämän?	154
Harjoitus 6–1: Keplerin rata	155
Harjoitus 6–2: <i>Rendezvous</i>	156
7. Satelliittinavigoinnin teknologiat	159
7.1 GPS-paikannusjärjestelmä	159
7.2 GPS-satelliitit ja signaalin rakenne	160
7.3 Kantoaallon korkkiruuvi	167
7.4 GPS:n lukuteoria	171
7.5 GPS-signaalin tehospektri	175
7.6 BOC, binaarinen offset kantoaaltomodulaatio	177
7.7 Koodin ja kantoaallon vaiheen mittaus	181
7.8 Kellon mallinnus	185
7.9 Vaihetuettu koodimittaus	187
Olenko ymmärtänyt tämän?	189
Harjoitus 7–1: Bitin edustus kolmella blokilla	190
8. Tosiaikaiset GNSS-havainnot	191
8.1 GNSS:n havaintoyhtälöt	191
8.2 Havaintoyhtälöiden linearisointi	193
8.3 Ilmakehän mallinnus	197
8.4 Eri estimointitehtävien dynaamiset mallit	202
8.5 Differentiaalipaikannus	206
8.6 Tosiaikainen kinemaattinen paikannus	207
8.7 Tietoyhteys	209



8.8	RTCM-standardi	210
8.9	NTRIP-protokolla	212
	Olenko ymmärtänyt tämän?	212
	Harjoitus 8 – 1: Dynaamisen mallin 8.17 linearisointi	213
9.	RTK-navigointi	215
9.1	RTK ja kokonaistuntemattomat	215
9.2	Nopea kokonaistuntemattomien ratkaisu	218
9.3	RTK-mittauksen geometrinen analyysi	223
9.4	Tukiasemaverkot	229
9.5	Ilmakehän mallinnus	231
	Olenko ymmärtänyt tämän?	233
	Harjoitus 9 – 1: Eron varianssifunktio	233
10.	Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät	235
10.1	Vastaanottimen itsenäinen eheyden seuranta	235
10.2	SBAS-teknologian kuvaus	238
10.3	Eheys ja <i>safety of life</i>	241
10.4	WAAS	242
10.5	EGNOS	245
10.6	Japanin SBAS-järjestelmät	245
10.7	Intian GAGAN-järjestelmä	249
10.8	Maapohjaiset parannusjärjestelmät	250
10.9	Internetpohjaiset parannusjärjestelmät	251
	Olenko ymmärtänyt tämän?	252
11.	Satelliittinavigoinnin uusi aikakausi	253
11.1	GPS-järjestelmän modernisointi	253
11.2	Venäläinen GLONASS-järjestelmä	256
11.3	Eurooppalainen Galileo-järjestelmä	258
11.4	Kiinalainen BeiDou-järjestelmä	261
	Olenko ymmärtänyt tämän?	263
12.	Painovoiman mittaus lennossa	265
12.1	Vektori-ilmagravimetria	266



12.2	Skalaari-ilmagravimetria	266
12.3	Kalmanin suotimen käyttö ilmagravimetriassa	268
12.4	Antureiden välinen kalibrointi	270
12.5	Ilmagravimetrian nykytila	270
12.6	Maan painovoimakentän tutkimus avaruudesta	272
	Olenko ymmärtänyt tämän?	273
13.	Anturifuusio ja sattuman anturit	275
13.1	Case: Sky Map	276
13.2	Nollanopeuspäivitys	282
13.3	GNSS:n ja IMU:n integrointi	286
13.4	Asennonmittaus GNSS:llä	287
13.5	Moderni radionavigointi	289
13.6	Mikroelektroniset liikeanturit (MEMS)	290
13.7	Jalankulkijanavigointi	291
13.8	Sisätilanavigointi	293
	Olenko ymmärtänyt tämän?	294
A.	Tehon spektraalitiheys on ei-negatiivinen	295
B.	M-jonot ja Goldin koodit	297
C.	Woodburyn matriisiyhtälö	303
D.	Tosiaikaiset järjestelmät ja verkot	305
D.1	Tietoliikenneverkot	305
D.2	Tosiaikaiset järjestelmät	313
	Kirjallisuutta	321
	Hakemisto	335

Kuvat

1.1	Elämä on navigointia	2
1.2	Polynesian muuttoreitit	3



1.3	Valkoposkihanhet syysmuuttomatkalla	4
1.4	John Harrisonin rakentama kronometri H5	4
1.5	Saksalainen ohjusase V-2	7
1.6	Eri koordinaatistot navigoinnissa	8
1.7	Kulkuneuvon asentokulmat	9
1.8	Korkeusjärjestelmät ja vertauspinnat	12
2.1	Gaussin kellokäyrä eli normaalijakauma	17
2.2	Virhe-ellipsi	23
2.3	Diracin deltafunktio blokkifunktioiden limiittinä	37
2.4	Gaussin ja Markovin prosessin autokovarianssifunktio . .	42
2.5	Gaussin ja Markovin prosessin tehon spektraalitiheys . .	46
3.1	<i>Rendezvous</i> Kuun kiertoradalla	52
3.2	Kalmanin suodin: yhteenveto	54
3.3	Tilavektorin kehitys ja tilavarianssin ennustaminen kohinan läsnä ollessa	65
3.4	Optimaalisuus ja virhe-ellipsit	72
4.1	Kalmanin suodin käytettynä ajassa eteen- ja taaksepäin ajassa	89
4.2	Satunnaiskulkuk: ratkaisu kahteen suuntaan	91
5.1	Gyroskooppi ja rengaslaser	100
5.2	Kuinka vääntö aiheuttaa pyörimisakselin prekessiota . .	105
5.3	Gyroskoopin roottori ja sen hitausmomentit	105
5.4	Jousikiihtyvyysmittarin periaate	107
5.5	Heilurikiihtyvyysmittari	107
5.6	Gyroskooppipohjainen heilurikiihtyvyysmittari	108
5.7	Sagnacin interferometri	110
5.8	Inertialaite ST-124	111
5.9	Vakautetun alustan periaate	118
5.10	Hyrräkompassin periaate	119
5.11	Yksiulotteinen navigointivaunu	123
5.12	Schulerin palautesilmukka	123

5.13	Virheiden kasautuminen yksiulotteisen mekanisoinnin mukaan	126
6.1	Keplerin rata-alkiot avaruudessa	134
6.2	Keplerin rata-alkiot tasossa	136
6.3	Eksentrinen rata	137
6.4	R-matriisin johtaminen	141
6.5	Hillin koordinaatisto	143
6.6	Libraatioliike	150
6.7	Lineaarinen ajelehtiminen	151
6.8	<i>Rendezvous</i> ja Hohmannin siirtorata	157
7.1	GPS-konstellaatio	160
7.2	Vaihemodulaation periaate	163
7.3	GPS-koodien tehosppektrit	165
7.4	Ympyräpolarisoidut radioaallot kulkevat lähettimeltä vastaanottimelle	165
7.5	Ympyräpolarisoidun säteilyn vastaanotto	168
7.6	Vaihekelaus	169
7.7	Vaihekelauksen vaikutus kaksoiserotushavainnoille	170
7.8	Lineaarisen palautteen siirtorekisteri	172
7.9	Kommutoiva kaavio koodibiteistä ja signaaliarvoista	174
7.10	GPS-modulaation autokovarianssifunktio	177
7.11	Alkuperäisen GPS-signaalin tehosppektri	178
7.12	BOC, binaarinen offset kantaaltomodulaatio	179
7.13	Esimerkki siitä, miten BOC siirtää tehoa sivukaistoihin . .	181
7.14	GNSS-koodiseuranta	181
7.15	Costasin diskriminaattorin suorittama kantaallan vaiheen seuranta	183
8.1	Differentiaalipaikannus	206
8.2	Differentiaalipaikannuksen tarkkuuden arvioimisen geometria	207
8.3	Tosi-ajan kinemaattisen GNSS-paikannuksen idea	209
9.1	Kokonaistuntemattomien ratkaisu	220



9.2	Kokonaistuntemattomien fiksu ratkaiseminen	222
9.3	Satelliitin näkölinjaan sidottu kanta	224
9.4	Barysentriset koordinaatit	228
9.5	Differentiaali-GNSS:n geometria	229
10.1	SBAS-transpondereiden geometria	239
10.2	WAASin maalohko	244
10.3	EGNOSin maalohko	246
10.4	MSASin ja QZSSin maalohkot	248
10.5	QZSS-radan toimintaidea	249
10.6	GAGANin maalohko	251
11.1	L2C ja aikajakomultipleksointi	256
11.2	Galileon taajuudet	260
12.1	Lockheed Hercules nousee NorthGRIP-jääkairausase- malta	271
12.2	Afganistanin ilmagravimetriakartoitus	272
12.3	GRACE-mission tulokset	274
13.1	Matkapuhelimen suuntaus kiihtyvyysmittarin ja magne- tometrin avulla	278
13.2	Yksinkertainen Kalmanin suodin ilman nollanopeuspäi- vityksiä ja niiden kanssa	285
13.3	Asennonmittaus GNSS:llä	287
13.4	MEMS-pyörähdysanturin periaate	292
B.1	C/A-koodin muodostaminen	301
D.1	Amplitudimodulaatio ja kaistaleveys	306
D.2	Binaarinen taajuusavainmodulaatio	309
D.3	Protokollapinon esimerkki	310
D.4	Proseduurikutsu ja pinon käyttö	316

Taulukot

2.1	Todennäköisyydet ja sigmarajat yhden, kahden ja kolmen ulottuvuuden tapauksessa	22
-----	--	----



2.2	Eri stokastisten prosessien ominaisuuksien yhteenveto . . .	43
5.1	Mekanisoinnin simulointi yhdessä ulottuvuudessa, octave-koodi	127
6.1	Keplerin rata-alkiot	135
7.1	GPS-signaalin kantoaallot	162
7.2	GPS-signaalin näennäissatunnaiskoodit	164
7.3	Kuvan 7.8 rekisterin arvojen jono	173
7.4	Rekisteriarvojen jonot vaihtoehtoisen rekisterin geometrian tapauksessa	175
7.5	GPS-signaalin tehospektri: laskennan koodi	178
8.1	RTCM SC-104-formaatin viestityypit	211
10.1	χ^2 -testirajat arvolle $\alpha = 1 - 1/15\,000$ eri vapausasteiden määrille	238
10.2	Eri lähestymiskategoriat ICAO:n mukaan	241
10.3	WAAS-satelliitit	242
10.4	EGNOS-satelliitit	243
10.5	MSAS-satelliitit	247
10.6	GAGAN-satelliitit	250
11.1	Uusia globaaleja navigointisatelliittijärjestelmiä	254
11.2	GLONASSin näennäissatunnaiskoodit	259
11.3	BeiDou-3:n näennäissatunnaiskoodit	263
13.1	Sky Mapin koodi matkapuhelimen asennon määrittämiseksi	279

Lyhenteet

- AFSCN** Air Force Satellite Control Network (**GPS**) 160
- A-GNSS** avustettu **GNSS** 290
- APPS** Automatic Precise Positioning Service 252
- AR(1)** ensimmäisen kertaluvun autoregressiivinen prosessi 41
- ARAIM** edistynyt **RAIM**, käyttää vähintään kahta **GNSS**-järjestelmää taajuuksilla L1 ja L5 jopa paremman eheyden takaamiseksi 238, 261
- BDSBAS** BeiDou Satellite-Based Augmentation System, Kiinan kehitteillä oleva **SBAS**-järjestelmä 235
- BeiDou** ”BeiDou Navigation Satellite System” (BDS), kiinalainen globaali navigointisatelliittijärjestelmä 14, 164, 254, 258, 261–263
- BFSK** binary frequency-shift keying, binaarinen taajuusavainnus 309
- BKG** *Bundesamt für Kartographie und Geodäsie*, Federal Agency for Cartography and Geodesy, Saksan liittovaltion kartografian ja geodesian laitos 210, 212
- BOC** binary offset carrier, binaarinen offset kantaalto 164, 177–181, 189, 255, 256, 259, 260, 263
- BPSK** binary phase-shift keying, binaarinen vaiheavainnus 163, 164, 177–179, 256, 259, 260, 263
- CDMA** code-division multiple access, koodijakokanavointi 163, 181, 249, 254, 258, 259, 263
- CHAMP** Challenging Minisatellite Payload 273
- CRC** cyclic redundancy check, syklinen redundanssitarkistus 309
- CSM** Command and Service Module (Apollo) 52
- Decca** hyperbelinen merinavigointijärjestelmä (vanhentunut) 5, 289, 293
- DGPS** differentiaalinen GPS 211
- DLL** delay-locked loop, viivelukittu silmukka 182
- DNS** Domain Name System, Internetin nimipalvelujärjestelmä 311
- DOP** dilution of precision, tarkkuuden laimennus (**GNSS**) 195, 237

- DSL** digital subscriber line, digitaalinen tilaajayhteys 309
- ECEF** Earth centred, Earth fixed, kiinteän Maan mukana pyörivä geosentrinen koordinaatisto 10
- EDAS** **EGNOS** Data Access Service 252
- EDGE** Enhanced Data Rates for **GSM** Evolution 311
- EGM2008** Earth Gravity Model 2008 116
- EGNOS** European Geostationary Navigation Overlay Service, satelliittipohjainen parannusjärjestelmä Euroopan alueelle xiv, xvi, xvii, 235, 243, 245, 246, 252, 260, 261, 263
- EOP** Earth orientation parameters, Maan suuntausparametrit 202
- ESA** European Space Agency, Euroopan avaruusjärjestö 245, 249, 258
- ETRF** European Terrestrial Reference Frame, tavallisesti vuosiluvun kera. **ETRS**:n realisaatio 10
- ETRS** European Terrestrial Reference System, määritelty liikkuvaksi Euraasian tektonisen laatan mukana xiv, 10
- EUREF** **IAG** Regional Reference Frame Sub-Commission for Europe 10
- FDMA** frequency-division multiple access, taajuusjakokanavointi 256, 263
- FFT** fast Fourier transform, nopea Fourier'n muunnos 35, 307
- FKP** *Flächenkorrekturparameter*, aluekorjausparametrit, verkko-**RTK**-tekniikka 230
- FRS** Fellow of the Royal Society (of London) 36
- GAGAN** GPS-Aided Geo Augmented Navigation, satelliittipohjainen parannusjärjestelmä Intian alueelle xv, 235, 250, 263
- Galileo** eurooppalainen globaali navigointisatelliittijärjestelmä xv, xvi, 14, 164, 177, 179, 180, 238, 254–256, 258–263
- GBAS** ground-based augmentation system, maanpäällinen parannusjärjestelmä 14, 250–252
- GDGPS** Global Differential GPS 210, 251, 252
- GIA** glacial isostatic adjustment, jääkauden jälkeinen isostaattinen sopeutiminen 202
- GJU** Galileo Joint Undertaking 259
- GLONASS** venäläinen maailmanlaajuisesti toimiva navigointisatelliittijärjestelmä xvi, 14, 164, 211, 254–259, 263
- GMS** Ground Monitor Station (**MSAS**) 248
- GNSS** global navigation satellite systems, yleisnimitys xiii, xv, xvii, 6, 11–13, 16, 133, 181, 182, 184, 185, 191, 195, 198–200, 202–213, 219, 223, 229, 231–233, 237, 238, 240, 249, 253, 255, 258, 259, 265, 266, 270, 273, 276, 278, 286, 287, 290, 291, 293, 294, 310
- GOCE** Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer 273, 274
- GPRS** General Packet Radio Services 311



- GPS** Global Positioning System [xiii](#), [xvi](#), [1](#), [5](#), [9](#), [10](#), [13](#), [14](#), [135](#), [159–167](#), [169](#), [171](#), [173](#), [175–179](#), [181](#), [182](#), [187](#), [189](#), [196](#), [197](#), [210](#), [211](#), [232](#), [235](#), [238–243](#), [247](#), [250](#), [252–263](#), [313](#)
- GRACE** Gravity Recovery and Climate Experiment [273](#), [274](#)
- GRS80** Geodetic Reference System 1980 [281](#)
- GSA** European **GNSS** Agency, aiemmin European **GNSS** Supervisory Authority [259](#)
- GSM** Global System for Mobile Communications [xiv](#), [311](#)
- GUI** graphical user interface, graafinen käyttöliittymä [314](#)
- GUS** Ground Uplink Station (**WAAS**) [243](#), [244](#)
- HAS** high-accuracy service, tarkkuuspalvelu (**Galileo**) [260](#), [261](#)
- HTTP** Hypertext Transfer Protocol [212](#), [310](#), [312](#)
- IAG** International Association of Geodesy, Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio [xiv](#), [9](#), [10](#)
- ICAO** International Civil Aviation Organization, Kansainvälinen siviili-ilmailujärjestö [241](#), [242](#), [250](#)
- ICD** Interface Control Document [256](#), [258](#), [262](#)
- ICMP** Internet Control Message Protocol [311](#)
- IERS** International Earth Rotation and Reference Systems Service [9](#)
- IGS** International GNSS Service [206](#)
- IGSO** inclined geostationary orbit [254](#), [262](#)
- i.i.d.* independent and identically distributed [27](#), [48](#), [195](#), [237](#)
- IMU** inertial measurement unit, inertiamittausyksikkö [99](#), [185](#), [285](#), [286](#), [292](#)
- INLUS** Indian Navigation Link Upload Station (**GAGAN**) [250](#), [251](#)
- INMCC** Indian Mission Control Centre (**GAGAN**) [249](#), [251](#)
- INRES** Indian Reference Station (**GAGAN**) [249](#), [251](#)
- INS** inertial navigation system, inertianavigointijärjestelmä [12](#)
- IOD** issue of data, *broadcast ephemeris* -ratatietojen aikaleima [240](#)
- IP** Internet Protocol [309](#), [311](#)
- ITRF** International Terrestrial Reference Frame, tavallisesti vuosiluvun kera, **ITRS**:n realisaatio [9](#), [10](#), [257](#)
- ITRS** International Terrestrial Reference System [xv](#), [10](#)
- JATO** jet-assisted take-off [271](#), [274](#)
- JAXA** Japanese Aerospace Exploration Agency [247](#)
- JPL** Jet Propulsion Laboratory [251](#)
- KASS** Korea Augmentation Satellite System, kehitteillä [235](#)
- KKJ** Kartastokoordinaattijärjestelmä (vanhentunut) [11](#)
- LAAS** local-area augmentation system, paikallinen parannusjärjestelmä [250](#)



- LAMBDA** Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment 220, 222, 223, 233
- LFSR** linear feedback shift register, lineaarisen palautteen siirtorekisteri 171
- LIFO** last in, first out data structure, viimeiseksi sisään, ensimmäiseksi ulos -tietorakenne 314, 316
- LOR** lunar orbit rendezvous, rendezvous Kuun kiertoradalla 51
- MAC** Master-Auxiliary Concept, verkko-RTK-tekniikka 201, 230
- MAX** Master-Auxiliary Corrections, verkko-RTK-tekniikka 201, 230, 231, 233
- MCC** Master Control Centre (EGNOS) 245, 246
- MCS** Master Control Station (GPS, MSAS) 160, 248
- MEMS** microelectronic motion sensor 106, 108, 290, 292, 294
- MSAS** Multi-functional Satellite Augmentation System xiv, xvi, 235, 245, 247, 248, 263
- MSM** Multiple Signal Message (RTCM-SC104 v. 3) 210
- NASA** National Aeronautics and Space Administration (Yhdysvallat) 111
- NLES** Navigation Land Earth Station (EGNOS) 245, 246
- NTP** Network Time Protocol 312
- NTRIP** Networked Transport of RTCM via Internet Protocol 212, 213, 252
- NWP** numerical weather prediction, numeerinen sääennustaminen 233
- OM** Order of Merit, Ansioritarikunta (Iso-Britannia) 36
- OS** open service, avoin palvelu (Galileo) 260, 261
- PFA** probability of false alarm, väärän hälytyksen todennäköisyys (RAIM) 237
- PLL** phase-locked loop, vaihelukittu silmukka 183
- PMD** probability of missed detection, huomioimatta jättämisen todennäköisyys (RAIM) 237
- PPP** precise point positioning, tarkka absoluuttinen paikannus 171
- PRN** pseudo-random noise, näennäissatunnaiskoodi 164, 209, 239, 242, 243, 245, 247, 249, 293
- PRS** President of the Royal Society 97
- PRS** public regulated service, viranomaispalvelu (Galileo) 260, 261
- PSD** power spectral density, tehon spektraalitiheys 43–47, 178, 181
- PZ-90** "Maan parametrit" 1990, GLONASSin virallinen vertauskehys 257
- QZSS** Quasi-Zenith Satellite System, japanilainen SBAS 164, 235, 245, 247–249, 252, 263
- RAIM** receiver autonomous integrity monitoring, vastaanottimen itsenäinen eheyden seuranta xiii, xvi, 14, 235–238, 241, 252, 261
- RDS** Radio Data System 229
- RIMS** Ranging and Integrity Monitoring Station (EGNOS) 245, 246



- RINEX** Receiver Independent Exchange Format 252
- RTCM** **RTCM-SC104**: Radio Technical Commission for Maritime Services Special Committee SC-104, differentiaalisen GNSS:n standardien sarja xvi, xvii, 210–213, 230, 231, 252
- RTK** real-time kinematic positioning, tosiaikainen kinemaattinen paikannus xiv, xvi, xviii, 11, 13, 201, 207, 208, 211, 212, 229, 230, 232, 233
- SAR** search-and-rescue, etsintä ja pelastus 261
- SBAS** satellite-based augmentation system, satelliittipohjainen parannusjärjestelmä xiii, xvi, xvii, 14, 201, 210, 235, 238–241, 245, 247–252, 255, 260, 263
- SDCM** System for Differential Corrections and Monitoring, Venäjän kehiteillä oleva SBAS-järjestelmä 235
- SISNeT** Signal in Space through the Internet, sovellus, jonka avulla EGNOSin signaali on saatavilla Internetin välityksellä 252
- SoL** safety of life 241, 255, 260, 261
- SSB** single sideband modulation, sivunauhamodulaatio 306
- TCP** Transmission Control Protocol 251, 310, 312
- TDM** time-division multiplexing, aikajakomultipleksointi 259
- TDMA** time-division multiple access, aikajakokanavointi 290
- TDOA** time difference of arrival, saapumisaikaeropaikannus 289
- TEC** total electron content, elektronien kokonaispitoisuus 250
- TECU** elektronien kokonaispitoisuuden yksikkö, 10^{16} elektronia per neliömetri (ilmakehän patsaan läpimitta) 197
- TOA** time of arrival, saapumisaikapaikannus 289, 294
- UAV** unmanned aerial vehicle, miehittämätön ilma-alus eli ”drone” 291, 313
- UDP** User Datagram Protocol 311, 312
- USB** Universal Serial Bus 312
- UTC** Universal Time Co-ordinated 136, 257
- V-2** (*Vergeltungswaffe 2*, ”Kostoase 2”). Saksalainen keskipitkän matkan ballistinen ohjus. Myös A4 (”Aggregat 4”) 6, 7, 108
- WAAS** Wide Area Augmentation System, satelliittipohjainen parannusjärjestelmä (SBAS) pohjois-Amerikan alueelle xv, xvii, xviii, 235, 238, 242–245, 252, 263
- WGS84** World Geodetic System 1984, Yhdysvaltain puolustuslaitoksen luoma ja ylläpitämä globaalien vertauskehysten sarja 9, 10, 257
- VHF** Very High Frequency, 30 – 300 MHz xvii, 235, 250
- WLAN** wireless local-area network, langaton lähiverkko 275, 289, 293
- WMS** Wide Area Master Station (WAAS) 243, 244
- VOR** **VHF** Omnidirectional Range, VHF-monisuuntamajakka (ilmailu) 235, 250



VRS virtual reference station, verkko-RTK-tekniikka 230, 233

WRS Wide Area Reference Station (WAAS) 243, 244

XOR exclusive “or” operation, eksklusiivinen disjunktio toiminta 161, 164, 172–175, 298, 299

ZTD zenith total delay, kokonaisen etenemisviive zenitissä 231

ZUPT zero-velocity update, nollanopeuspäivitys 282



Navigoinnin perusteet

1



1.1 Johdanto

”Navigointi” tulee latinalaisesta sanasta *navis* eli laiva. Navigointi on siis merenkulkua. Laajemmassa merkityksessä navigoinnilla tarkoitetaan sopivan reitin löytämistä ja sitä pitkin kulkemista, tarvittaessa rekursiivisesti. Tähän sisältyy oman sijainnin määrittäminen matkan aikana. Nykynavigointi, ainakin jokapäiväisen elinpiirimme ulkopuolella, toteutetaan aina teknologisesti.

Navigointi liittyy geodesiaan, koska myös geodesiassa tutkimuksen kohteena on *sijainti*. Geodesiassa Maan pinnalla olevien kohteiden sijainnit käsitellään kuitenkin yleensä vakioina tai hyvin hitaasti muuttuvina.

Navigoinnin ja perinteisen geodeettisen paikanmäärityksen väliset erot ovat siis seuraavat:

- Navigoinnissa sijaintitiedot tarvitaan *heti* tai korkeintaan tietyn enimmäisviiveen jälkeen. Tätä kutsutaan *tosiakaisuuden* vaatimukseksi.
- Navigoinnissa sijaintitiedot ovat *muuttuvia* eli ajasta riippuvaisia.

Nykynavigointi ei rajoitu merenkulkuun. Lentokoneet, ohjukset ja avaruusaluukset sekä kuivalla maalla liikkuvat kulkuneuvot ja jopa jalankulkijat ”navigoivat” nykYTEknologioiden avulla. Kehitys on pääosin kahden teknologian ansiota: satelliittipaikannuksen, kuten **GPS** (Global Positioning System), ja inertianavigoinnin. Myös tieto- ja viestintätekniikka on kehittynyt: erityisesti rekursiivinen lineaarinen suodatus eli Kalmanin suodin. Lisäksi pienet ja hinnaltaan huokeat digitaaliset anturit ovat mullistamassa jokapäiväisen navigoinnin.



KUVA 1.1. Elämä on navigointia. Votiivilaiva Karlskronan amiraliteetinkirkossa. (Wikimedia Commons, Votive offering, rajattu). Malli on korvetista Carlskrona, joka laskettiin vesille 1841. Laiva kaatui ja upposi tuulenpuuskassa Kuuban rannikon edustalla vuonna 1846 vieden mukanaan 114 miehistön 131 jäsenestä.



1.2 Historia



1.2.1 Vanha historia

Ihminen on aina tutkinut maailmaa ympärillään ja matkustanut kaukaa ja kauas. Navigointi on ollut välttämättömyys aina¹.

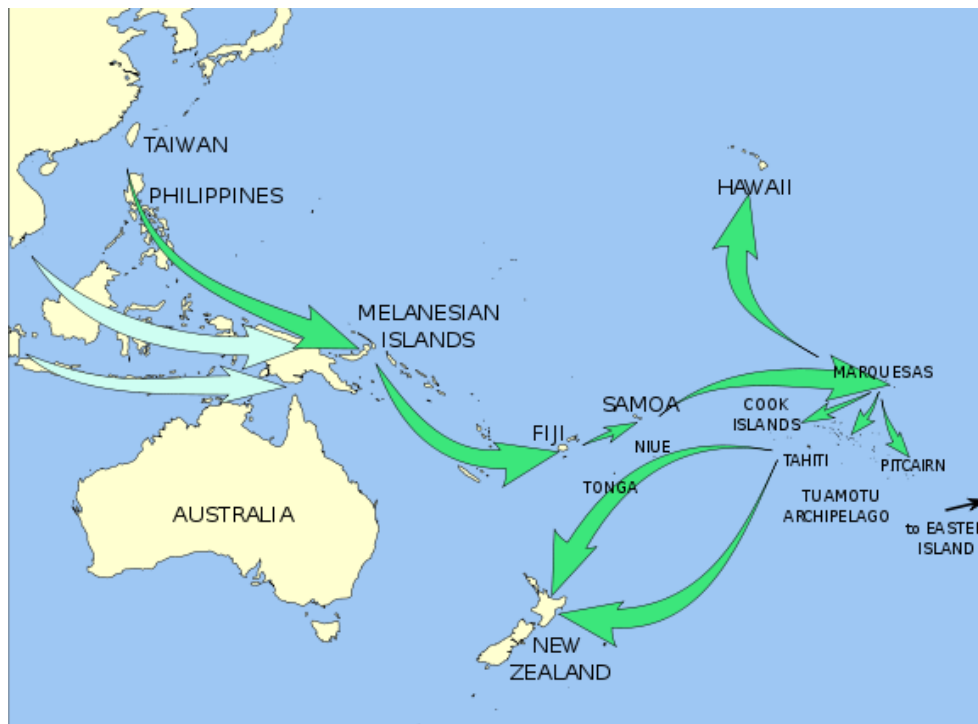
Ennen teknologisten mittaus- ja ohjausmenetelmien keksimistä elettiin maamerkkien ja matka-aikojen perusteella arvioitujen etäisyyksien varassa. Siksi vanhat kartat, jotka piirrettiin matkustajien kertomusten ja muistiinpanojen perusteella, ovat usein omituisella tavalla vääristyneitä.

Maamerkkien käyttö vaatii *kartoitusta* eli maailman kuvausta kartan muodossa. Matka *suunnitellaan* ja toteutetaan vertaamalla todellista paikkaa koko ajan aiottuun määränpäähän matkasuunnitelman mukaan.

Navigointia maamerkkien ja huipputeknologian avulla käyttävät esimerkiksi *risteilyohjukset*: ne lentävät muistissa olevan digitaalisen maastomallin korkeuskäyriä pitkin.

Jos esimerkiksi merenkulussa maamerkit puuttuvat, voidaan käyttää menetelmää nimeltä *merkintälasku* (engl. "dead reckoning"), [Wikipediasta](#).

¹"Navigare necesse est".



KUVA 1.2. Polynesian muuttoreitit, [Wikimedia Commons](#), [Polynesian migration](#).

dia, [Dead reckoning](#). Menetelmässä arvioidaan matkustussuunnan ja -nopeuden perusteella, missä merenkävijän *pitäisi* olla. Virheitä aiheuttavat tässä menetelmässä merivirtaukset — ilmailun tapauksessa tuulet — ja yleisemmin se, että ennustus heikkenee aikaa myöten.

Alkeellisilla menetelmillä merenkulku on melko turvallista vain lähellä rannikkoa. Silti foinikialaisten uskotaan matkustaneen näillä keinolla Afrikan mantereen ympäri, [Sinjab \(2010\)](#). Alkeelliset menetelmät riittivät myös siihen, että Tyynenmeren saaristot saivat ihmisasutuksensa. [Wikipedia, Polynesian navigation](#); [Kawaharada](#); [Exploratorium, Never Lost](#).

Katso myös [Diamond \(1999\)](#).

Myös linnut ovat hallinneet navigoinnin aina, [Lindsay \(2006\)](#).



1.2.2 Merenkulku

Merenkulku avomerellä edellyttää *mittausta*, koska maamerkkejä ei ole².

²Ei ainakaan itsestään selviä maamerkkejä. Jotkut ovat ihmetelleet, miten polynesialaiset merenkulkijat löysivät suhteellisen pikkuruisia saaristoja, kuten Havaiji. Heiltä jäi oivaltamatta, että saarten vaikutus pilviin, merivirtauksiin ja linnustoon ulottuu melko lailla merestä töröttävää kiinteistöä laajemmin — jos vain osaa katsella.



KUVA 1.3. Valkoposkihanhet syysmuuttomatalla, [Wikimedia Commons, Barnacle geese](#).



- Suunta on helpoin. Yöllä Pohjantähti näyttää, missä on pohjoinen. Päivällä voidaan käyttää Aurinkoa, vaikkakin monimutkaisemmalla tavalla. Pilvisellä säällä Auringon paikan löytämisessä voidaan hyödyntää taivaan valon polarisointia.

Magneettinen kompassi teki pohjoisen löytämisestä helpompaa kaikissa olosuhteissa. Magneettinen pohjoinen ei kuitenkaan ole maantieteellinen pohjoinen. Niiden välinen ero eli *eranto* riippuu



KUVA 1.4. John Harrisonin rakentama kronometri H5. [Wikimedia Commons, Harrison's chronometer H5](#).



sijainnista ja muuttuu ajassa.

- Leveysaste on helppo saada: sehän on taivaannavan korkeuskulma horisontin yläpuolella. Päivällä voidaan käyttää Aurinkoa: yläkulminaatio eli tähtitieteellisellä keskipäivällä voidaan havaita Auringon korkeuskulma η horisontin yläpuolella. Lisäksi tarvitaan Auringon deklinaatio eli taivaallinen leveysaste δ eli Auringon kulmaetäisyys taivaan ekvaattorista. Kulmaetäisyys saadaan tähtitieteellisistä taulukoista. Leveysaste φ lasketaan yhtälöllä

$$\varphi = \delta \begin{matrix} \text{pohjoinen} \\ \pm \\ \text{etelä} \end{matrix} (90^\circ - \eta).$$

Plussamerkki pätee, kun Auringon korkeuskulma havaitaan eteläisen horisontin yläpuolella, yleensä pohjoisella pallonpuoliskolla. Kun Aurinko näkyy suoraan pohjoisessa, yleensä eteläisellä pallonpuoliskolla, pätee miinusmerkki.

- Pituusaste on ongelmallinen Maan pyörähdysliikkeen takia. Tämä merkitsee, että maapallon asento Aurinkoon ja tähtiin nähden muuttuu nopeasti vuorokauden aikana. Auringon tai tähtien käyttäminen pituusasteen määrittämisessä vaatii tämän asennon tuntemisen. Se puolestaan vaatii absoluuttisen ajan tuntemisen tarkan aikastandardin eli *kronometrin* avulla. Katso [Sobel \(1995\)](#). Myös tähtitieteellisiä menetelmiä, kuten Jupiterin kuiden käyttöä ”kellona”, on tutkittu Galileosta lähtien ([Koberlein, 2016](#)). Lisäksi 1900-luvulla yleistyi aikamerkkien jakelu radioteitse.

1900-luvulla myös radiotekniset paikannusmenetelmät tulivat kuvioon mukaan. Tunnetuin on varmaankin [Decca](#), joka perustuu hyperbeliseen paikannukseen.

Yksi *master*-asema ja kaksi tai useampi ”*slave*”-asemaa eli apuasemaa lähettävät synkronoituja aikamerkkejä, jotka on moduloitu radioaaltoihin. Laivalla oleva vastaanotin mittaa *masterilta* ja apuasemalta vastaanotettujen aaltojen välisen kulkuajojen eron. Merikartalle on merkitty värillisenä käyränä, *hyperbelina*, kaikki pisteet, joilla on sama kulkuajojen ero. Jokainen apuasema muodostaa *masterin* kanssa yhden hyperbelikimppun, jolla on oma väri. Kahden hyperbelin leikkauspiste antaa laivan sijainnin. *Master*-aseman lisäksi tarvitaan siis ainakin kaksi apuasemaa.

Modernit satelliittipaikannusmenetelmät, kuten Transit (käytöstä poistettu), [GPS](#) ja muut globaalit navigointisatelliittijärjestelmät, perus-



tuvat hyperbelimenetelmän kolmiulotteiseen varianttiin.



1.2.3 Moderni aikakausi

Ilmailu ja avaruustutkimus ovat tuoneet mukanaan tarpeen automaattiselle kolmiulotteiselle navigoinnille. Vaikka ensimmäisiä lentokoneita voitiin vielä lentää käsin ilman instrumentteja, ensimmäinen moderni ohjus, saksalainen V-2, sisälsi jo gyroskooppipohjaisen ohjausjärjestelmän. Tässä tapauksessa navigointi on *ohjaus* (engl. *guidance*).

V-2:n ohjausjärjestelmä oli alkeellinen. Ohjus laukaistiin pystysuoraan ilmaan, jossa se kääntyi oikeaan suuntaan gyroskooppialustansa avulla. Ohjus kiihtyi, kunnes se saavutti ennalta määrätyn nopeuden, ja ajoainehanat suljettiin (*Brennschluss*). Fyysisesti ohjaus tapahtui pienten ”ilma- ja suihkuruorien” (*Luft- und Strahlruder*) avulla, jotka oli kytketty pyrstöön ja jotka muuttivat moottorista tulevien kuumien kaasujen suuntaa³.

Nykyään lentokoneissa ja avaruusaluksissa käytetään täydellistä inertianavigointia ja muita tietotekniikkaan perustuvia teknologioita, kuten satelliittipaikannus eli GNSS, *global navigation satellite systems*.



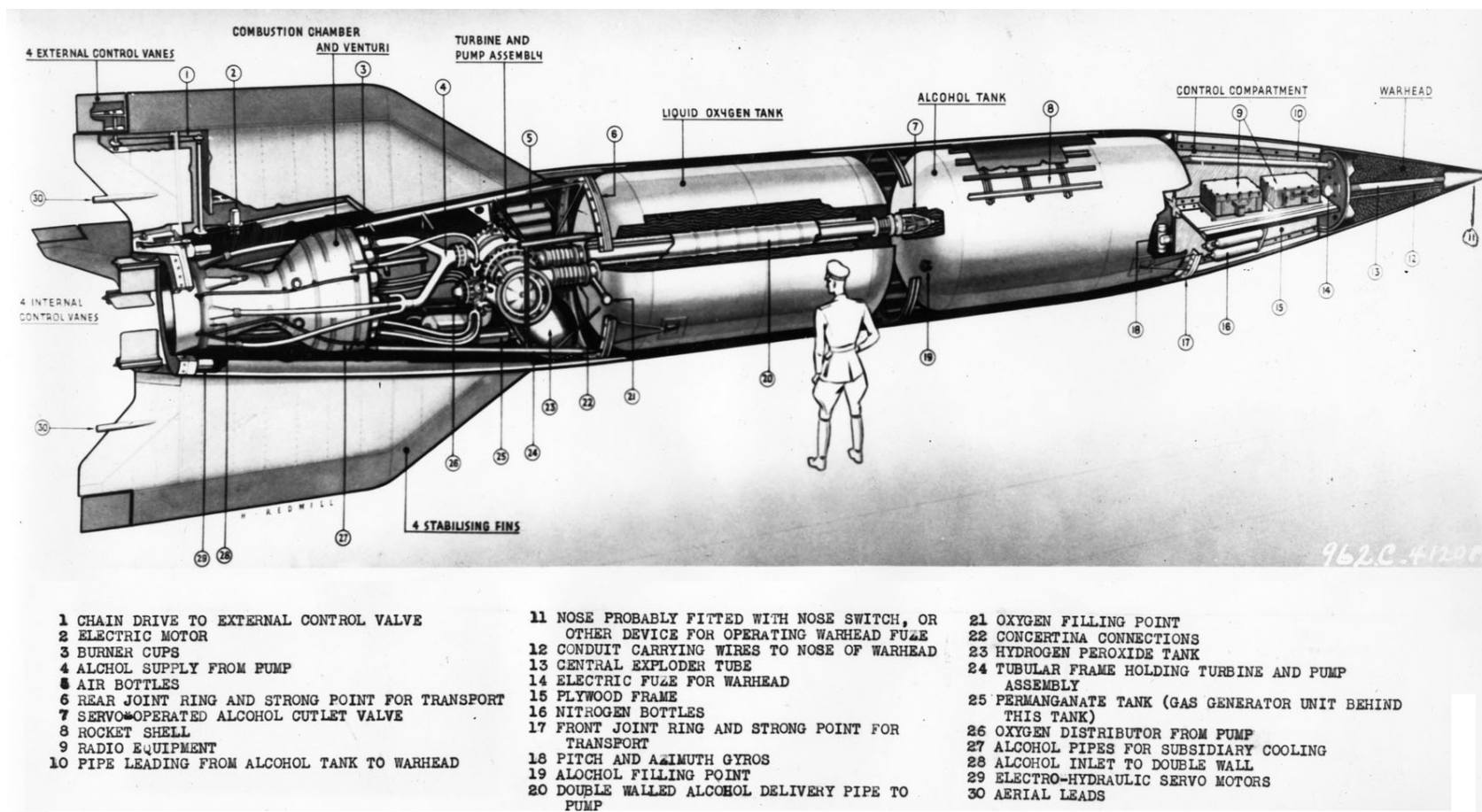
1.3 Kulkuneuvon liikkeet ja koordinaatistot

Liikkuvan kulkuneuvon yhteydessä on olemassa muutama merkityksellinen koordinaatisto eli vertauskehys, katso kuva 1.6:

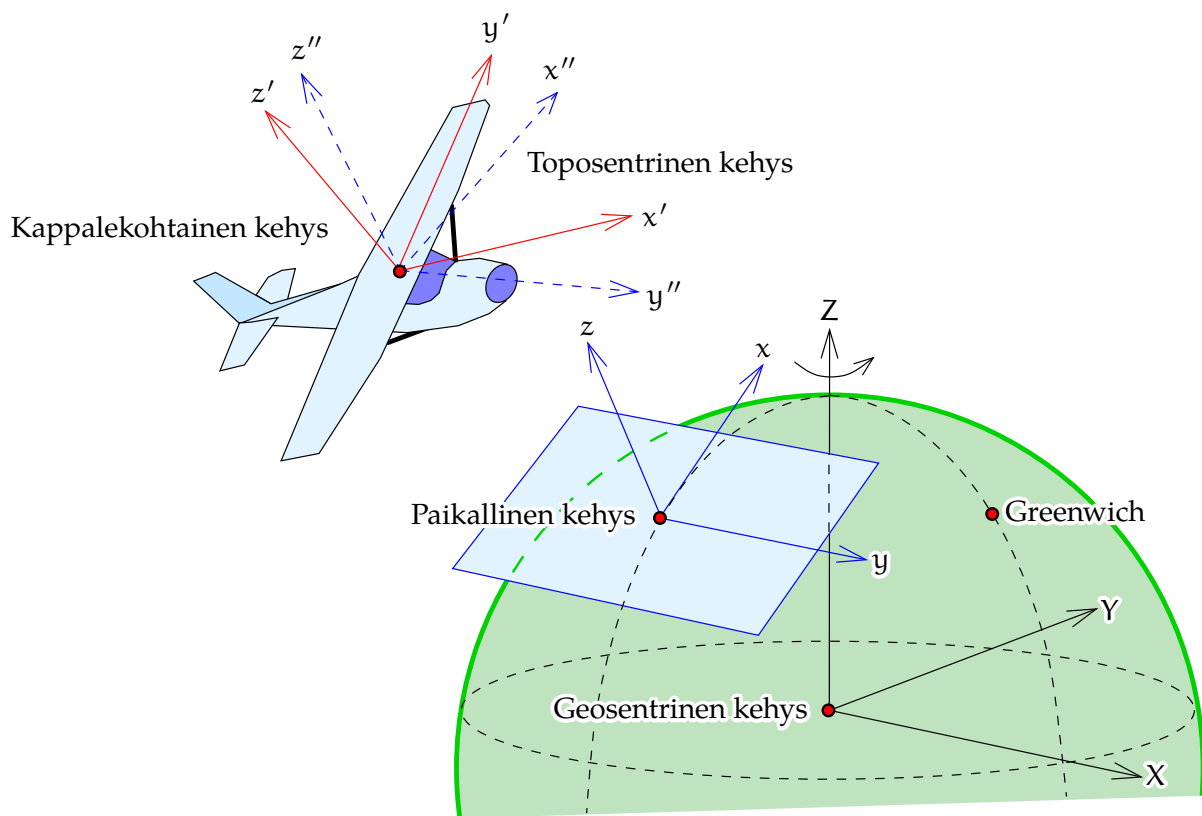
- 1) kappalekohtainen koordinaatisto: x' osoittaa liikesuuntaan, y' osoittaa sivuun paapuuriin ja z' osoittaa suunnilleen ylöspäin.
- 2) toposentrinen koordinaatisto, myös pohjoinen-itä-ylös: x'' -akseli osoittaa pohjoiseen (geodesiassa) tai itään (fotogrammetriassa ja navigoinnissa), z'' -akseli osoittaa ylöspäin (geodesiassa ja navigoinnissa) tai alaspäin (fotogrammetriassa) paikallista luotiviivaa pitkin ja y'' on kohtisuora molempiin nähden osoittaen joko pohjoiseen tai itään.

³Katso Wikipedia, V-2 rocket. Itse asiassa ilmaruorit olivat kaksinkertaisia: suihku-ruorit, jotka ulottuivat moottorin kuumaan kaasuvirtaan, oli tehty grafiitista, ja siksi ne paloivat nopeasti loppuun. Siihen mennessä raketilla oli jo niin paljon nopeutta, että ulkopuoliset ilmaruorit ottivat raketin haltuunsa.

Nykypäivän raketit suuntaavat moottoriaan hydraulisesti, jotta työntövoimavektori hallitaan tarkasti.



Kuva 1.5. Saksalainen ohjusase V-2. Kuva: Yhdysvaltojen ilmavoimat.



KUVA 1.6. Eri koordinaatistot navigoinnissa.

- 3) paikallinen tai alueellinen terrestrinen koordinaatisto, jossa x ja y ovat karttaprojektiokoordinaatit, ja z on paikallisessa korkeusjärjestelmässä määriteltä korkeus sovitusta vertauspinnasta paikallista luotiviivaa pitkin.

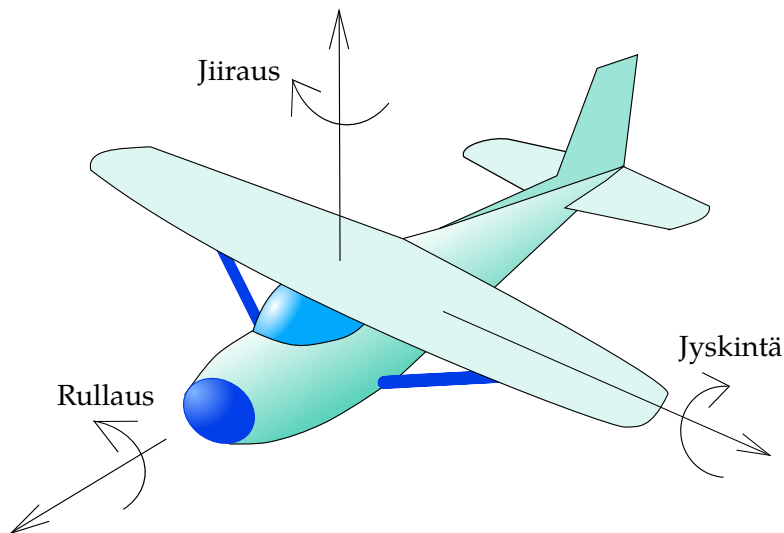
Tämä on kvasi-karteesinen vertauskehys, jota käytetään usein ilmakuvakartoituksessa.

- 4) Vaihtoehtoisesti *geosentrinen* ulkoinen koordinaatisto, katso osio **1.4.**

Kappalekohtaisen ja ulkoisen kehyksen välillä on olemassa muunnos, jota luonnehtii kolme *siirto-* eli *translaatioparametria* ja kolme *kiertokulmaa* eli Eulerin kulmaa. Liikkuvalla kulkuneuvolla kaikki kuusi ovat jatkuvia ajan funktioita, kuten myöskin niiden ensimmäiset aikaderivaatat, jotka tunnetaan *nopeuksina* ja *kiertonopeuksina*.

Kulkuneuvon *asentoa* voidaan kuvata kolmen akselin suhteen. Akselien nimet suomeksi ovat ainakin ilmailussa pysty-, poikki- ja pituusakselit (engl. *yaw*, *pitch* ja *roll axes*). Pyörähdysliikettä matkasuunnan eli pituusakselin ympäri kutsutaan (etenkin ilmailussa) *kallistumiseksi*, *rullaukseksi* (ruots. *att rulla*) tai *keinumiseksi*, liikettä pystyakselin ym-





KUVA 1.7. Kulkuneuvon asentokulmat.

päri kääntymiseksi (ilmailu), *jiiraukseksi* (ruots. att *gira*) tai *mutkailuksi*, ja liikettä vaaka-akselin (vasen-oikea-akselin) ympäri *nyökkäämiseksi* (ilmailu) tai *jyskinnäksi* (ruots. att *stampa*)⁴. Nämä termit eivät ole suomen kielellä vakiintuneita. Puhutaan myös *Eulerin kulmista*, esimerkiksi fotogrammetriassa κ , ϕ , ω . Niiden määritelmä on kuitenkin hieman erilainen.



1.4 Geosentriset vertauskehykset

Vertauskehysten eli koordinaatiston *geosentrisyys* merkitsee, että

- Origo on Maan massakeskipisteessä tai hyvin lähellä sitä.
- Z-akseli osoittaa Maan pyörimisakselin suuntaan.
- X-akseli on Greenwichin meridiaanin tason sisällä ja osoittaa päiväntasaajan ja Greenwichin meridiaanitason leikkauspisteeseen.
- Y-akseli on kohtisuorassa molempiin muihin nähden.

Sellaisenaan **GPS** antaa koordinaatit **WGS84**-vertauskehyksessä, joka on **GPS**-järjestelmän alusta lähtien käyttämä geosentrinen kehys. Sitä ylläpitää Yhdysvaltain puolustuslaitos, ja siitä on ollut useita versioita.

Kansainvälinen geodeettinen tutkimusyhteisö on **IAG:n**, Kansainvälisen geodeettisen assosiaation, kautta laatinut omia geosentrisiä kehyksiä. **IAG:n** palvelun nimi on **IERS** eli International Earth Rotation and Reference Systems Service. Kehysten nimet ovat **ITRFyy**: International

⁴Kiitos Jukka Varonen ja Kimmo Penttilä!

Terrestrial Reference Frame. yy on julkaisemisen vuosiluku.

Nykyisin nämä kehykset yhtyvät senttimetritasolla **WGS84**:ään.

Eurooppalaisella alueella **IAG**:n Euroopan alueellinen vertauskehyyksen alakomitea (**EUREF**) on samalla tavalla toimittanut eurooppalaisia geosentrisiä vertauskehyyksiä nimeltä **ETRF**yy: European Terrestrial Reference Frame. **ETRF**-kehykset on suunniteltu näin, että pisteiden koordinaatit eivät muutu Euraasian mannerlaatalla eli järjestelmä *liikkuu laatan mukana*. Monissa Euroopan maissa ja tiedepiireissä on käytössä järjestelmän **ETRS-89** realisaatioita, kuten Suomessa **EUREF-FIN**. **ETRS-89**:n määrittäyshetki eli *epookki* on vuoden 1989 alku, jolloin se yhtyi **ITRS**:n kanssa (International Terrestrial Reference System).

Vertauskehykset **WGS84**, **ITRF** ja **ETRF** ovat kaikki geosentrisiä. Ne ovat myös terrestriä eli kiinnitettyjä kiinteään Maahan ja ”mukana pyöriä”: **ECEF**, ”Earth centred, Earth fixed”. Tämän tyyppisiä koordinaatteja saadaan satelliittipaikannuslaitteista.

Mainitut vertauskehykset *eivät* ole *inertiaalisia*: inertialaitteiden käyttö osoittaa heti, että ne kääntyvät maapallon mukaan kerran tähtivuorokaudessa eli ajassa $23^h 56^m 4^s$. Tietysti sama näkyy myös, kun katsoo taivasta tähtikirkkaana yönä...

Newtonin liikelait pätevät vain inertiaalisessa koordinaatistossa. Inertialaitteet on viritettävä huolellisesti, jos niitä käytetään Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, kuten todetaan osiossa 5.9.

Inertiaalinen koordinaatisto on sovitusti myös geosenttrinen: origo sijoittuu Maan massakeskipisteeseen. X-akseli osoittaa Greenwichin meridiaanitason suunnan sijasta kevättasauspisteen suuntaan. Kevättasauspiste on Auringon paikka taivaalla kevään alussa, kun se siirtyy eteläiseltä pohjoiselle pallonpuoliskolle. Tämän lisäksi käytetty aikaskaala on sidottu keskimerenpinnan geopotentiaaliin. Sillä on merkitystä, jos käyttää tarkkoja atomikelloja sekä maanpinnalla että avaruudessa.



1.5 Ei-geosentriset vertauskehykset

1990-luvun alusta lähtien geosenttristen vertauskehysten luomiseen on ollut käytettävissä **GPS**. Useimmat maailman kansakunnat ovat kansainvälisen geodeettisen yhteisön tukemana käyttäneet tätä tilaisuutta hyväkseen, ja nykyään **ITRS** on useimpien virallisten vertauskehysten pohjana.

Tämä ei kuitenkaan merkitse, että vanhoista koordinaatistoista on



luovuttu kokonaan. Miljoonat pistekoordinaatit vanhoissa koordinaatioissa viruvat vanhoissa asiakirjoissa. Tällaisia ovat esimerkiksi tonttirajat sekä digitaaliset kaavoitus- ja infrastruktuurikartat. Kunnat ovat panostaneet merkittävästi saadakseen muunnettua nämä aineistot geosentrisiksi. Vanhoja koordinaatteja ei enää suositella käytettäväksi.

Tosiaikainen kinemaattinen (RTK) paikannus, lähinnä navigointin menetelmä, on laajassa käytössä oleva datankeruumenetelmä digitaalisessa kartoitustyössä. Se on myös esimerkki siitä, miten ”navigointiratkaisua” voidaan käyttää kartoitustarkoituksessa. Etuna on, ettei mittauksen jälkeen ole toimistotyötä. Kerätty data — joka voi olla varsin laaja ja jopa miljoonia pisteitä — menee suoraan paikkatietojärjestelmään rajallisen käsityön, esimerkiksi tietyn luettelon mukaisen tyyppikoodauksen, jälkeen.

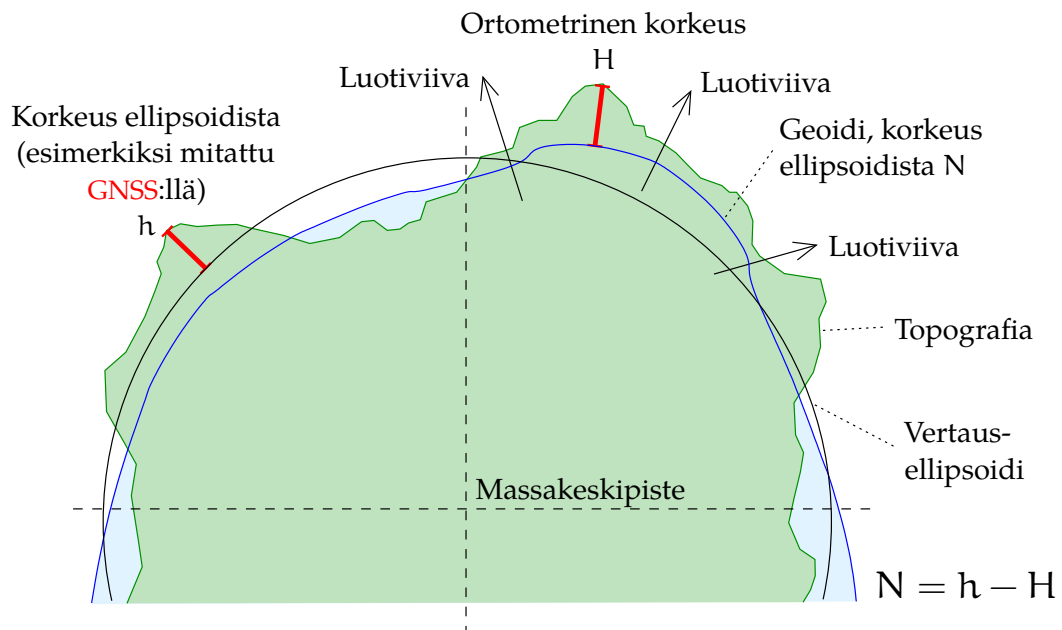
Jos tarkkuusvaatimus on metrin tasoa, tehtävään kelpaa jopa koodipohjainen differentiaali-GNSS.

Jos halutaan tehdä töitä paikallisessa tai valtakunnallisessa ei-geosentrisessä järjestelmässä, kuten KKJ eli Kartastokoordinaattijärjestelmä, ja halutaan samalla säilyttää GNSS-mittauksista saatu ylivoimainen tarkkuus, asiat mutkistuvat.

Jotkut RTK-GNSS -laitteistot mahdollistavat seuraavan mittaustavan:

- Mitataan muutama KKJ:ssä tunnettu piste mittausalueen reunoilla ja syötetään niiden KKJ-koordinaatit.
- Mitataan mitattavat uudet pisteet alueella.
- Palataan tunnetulle pisteelle ja tarkistetaan, onko mittauksen aikana tapahtunut havaintosuureen eli kantoaallon vaiheen kokonaistuntemattoman muutos (vaihekatko eli ”cycle slip”).
- Laite laskee itse muunnoskaavan parametrit tunnettujen pisteiden avulla ja muuntaa lennossa kaikki uudet mittauspisteet KKJ:hin. Käytetty muunnos on tavallisesti Helmertin muunnos avaruudessa.

Menetelmän haittapuoli on, että mittausaineiston alkuperäinen tarkkuus putoaa peruuttamattomasti KKJ:n aina heikompaan paikalliseen tarkkuuteen. Siksi menetelmä on käytännössä vanhentunut, eikä sitä käytetä enää: RTK-mittauksissa käytettyjen tunnettujen pisteiden koordinaattien on oltava geosentrisiä.



KUVA 1.8. Korkeusjärjestelmät ja vertauspinnat.



1.6 Korkeuden vertaustaso

GNSS-paikanmäärittystä käytetään usein korkeuden määrittämiseen. Silloin tulee vastaan ongelma, että korkeudetkin ovat geosentrisiä, toisin sanoen ne ovat korkeuksia geosentrisen, matemaattisesti määritellyn *vertausellipsoidin* yläpuolella. Sen sijaan perinteiset korkeudet ovat ”keskimerenpinnan” eli tarkemmin *geoidin* yläpuolella.

Tämä pätee, kun käytetään paikannusratkaisuja, jotka eivät riipu suoraan Maan painovoimakentästä, kuten inertianavigointi (**INS**) tai **GNSS**:n ja **INS**:n integrointi.

Kuva 1.8 selostaa korkeuden eri vertauspinnat ja niiden väliset yhteydet.



1.7 Peruskäsitteet ja teknologiat

Seuraavissa luvuissa käsitellään peruskäsitteet ja teknologiat systemaattisesti. Tulemme näkemään, että olemassa on monia teknologioita ja menetelmiä, jotka soveltuvat sekä navigaatioon että geodeettiseen paikanmäärittelyyn.

Käsiteltäviä ideoita, käsitteitä ja teknologioita:

- Stokastiset prosessit ja niiden ominaisuudet alkaen stokastisten muuttujien perusteista, estimoinnista ja keskiarvostamisesta, kovarianssista ja korrelaatiosta. Sen jälkeen kuvataan aikasarjat ja

lineaarinen regressio, mukaan lukien ajallinen korrelaatio. Auto- ja ristikovarianssi esitetään samoin kuin tunnetut stokastiset prosessit: valkoinen kohina, satunnaiskulku sekä Gaussin ja Markovin prosessi. Lopuksi käsitellään tehon spektraalitiheyttä ja sen yhteyttä autokovarianssifunktioon.

- Kalmanin suodin esitetään lineaarisen estimoinnin ja pienimmän neliösumman menetelmän esimerkkinä. Läpi käydään tilavektori, dynaaminen malli ja havaintomalli sekä niihin liittyvät tilastolliset mallit. Lisäksi näytetään, kuinka dynaaminen malli voidaan esittää joko diskreetissä tai jatkuvassa muodossa ja kuinka tilaestimaattori ja tilavarianssi etenevät ajassa. Sen jälkeen näytetään, kuinka havaintoja käytetään tilan päivittämiseen optimaalisesti Kalmanin päivitysyhtälön avulla. Lopuksi seuraa muutama laskennan ja sovelluksen esimerkki.
- Inertianavigointi esitetään alkaen fysikaalisista periaatteista, käytetyistä laitteistokomponenteista ja teknisistä ratkaisuista. Seuraavaksi kehitetään navigoinnin matematiikka kiinteän maan järjestelmässä ja selitetään vakautettu alusta, hyrräkompassi ja Schulerin heiluri, jota käytetään navigointiin yhdessä ulottuvuudessa pallomaisen Maan pinnalla. Lopuksi käsitellään mekaniisointia ja esitetään esimerkkinä yksinkertaistettu kaksiulotteisen navigoinnin ratkaisu Maan kaarevalla pinnalla.
- Satelliittiradat esitetään ensin Keplerin ratamekaniikan ja sen jälkeen pyörivän Hillin koordinaatiston puitteissa. Tarkoituksena on kahden kiertävän kappaleen suhteellisten liikkeiden kuvaaminen. Clohessyn ja Wiltshiren formalismia kehitetään ja esitetään sovelluksina navigointi kiertoradalla ja *rendezvous*-ongelma.
- **GPS**, *Global Positioning System*, yleisemmin **GNSS**, *global navigation satellite systems*. Taustalla olevat teknologiat esitetään keskittyen sähkömagneettisten aaltojen etenemisen, polarisaation ja modulaation fysiikkaan sekä näennäissatunnaiskoodien matematiikkaan. Navigointisatelliittien signaalien tehon spektraalitiheydet johdetaan. Kuvataan pseudoetäisyyksien mittaustekniikat, jotka käyttävät joko kantoaallon vaihekulmia tai kantoaaltoon moduloituja koodeja. Lopuksi esitetään atomikellojen käyttäytyminen ja vaihetuettu koodimittaus.
- **GNSS**:n käyttö navigoinnissa. Tosiaikainen kinemaattinen (**RTK**) mittaustekniikka esitetään laajasti. Muodostetaan havaintoyhtälöt



ja tutkitaan mittausgeometriaa, kokonaistuntemattomien ratkaisemista, ilmakehän etenemisviiveiden mallintamista, tukiasemien verkkojen käyttöä ja tietostandardeja differentiaalikorjausten levittämiseksi.

- *Satellite-based augmentation systems (SBAS)* eli satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät. Käydään läpi, miten ne toimivat, miksi ne ovat arvokkaita, miten ne standardisoidaan ja mitkä maat ovat raketaneet tällaisia järjestelmiä omille ilmatiloilleen. Esitetään myös liittyviä tai täydentäviä menetelmiä, kuten **RAIM**, vastaanottimen itsenäinen eheyden seuranta ja **GBAS**, maapohjaiset parannusjärjestelmät.
- Uudet **GPS**:n jälkeiset satelliittinavigointijärjestelmät **GLONASS** (Venäjä), **Compass/BeiDou** (Kiina) ja **Galileo** (Eurooppa). Kuvataan yksityiskohtaisesti nämä järjestelmät, niiden satelliittikonstellatiot ja kiertoradat, käytetyt taajuudet ja modulaatiotekniikat.
- Lyhyt intermezzo aiheesta painovoiman kartoitus ilmasta tai avaruudesta. Tekniikoilla on paljon yhteistä painovoimakentässä navigoinnin kanssa.
- Selitetään anturifuusio ja sattuman anturit maustettuna muutamalla mielenkiintoisella esimerkillä aktiiviselta tutkimuskentältä.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mitä on tosiaikaisuus?
- 2) Mikä on merkintälasku?
- 3) Mitkä ovat maamerkinavigoinnin rajoitukset?
- 4) Miten löydät leveysasteesi päiväsaikaan? Entä yöllä?
- 5) Miksi pituusasteen määrittäminen vaatii tarkan kronometrin?
- 6) Mitkä ovat nimet niille kolmelle akselille, joiden ympäri kulku-neuvo voi kääntyä?
- 7) Miten hyperbelinen paikannusjärjestelmä toimii?
- 8) Mikä on geosentrinen vertauskehys eli koordinaatisto?
- 9) Mikä on ero inertiaalisen ja Maan mukana pyörivän vertauskehysen eli koordinaatiston välillä?
- 10) Mitä erityyppisiä korkeuksia on olemassa? Mikä on geoidin rooli?





Stokastiset prosessit

2



2.1 Stokastiset muuttujat ja prosessit

Ajassa satunnaisesti muuttuvien, epävarmojen suureiden yleinen kuvaustapa on *stokastinen prosessi*. Stokastinen prosessi on stokastisen muuttujan käsitteen yleistys funktioihin.

Aiheen taustalukemista tarjoaa **Strang ja Borre (1997)**, sivut 515–541.



2.1.1 Stokastiset muuttujat

Määritellään *stokastinen muuttuja* seuraavasti:

Stokastinen muuttuja \underline{x} on sarja suureen x realisaatioita $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, eli x_i , $i = 1, 2, \dots$. Jokaisella realisaatioarvolla on tietty todennäköisyys $p(x)$ toteutua. Kun realisaatioita eli "heittoja" toistetaan uudestaan ja uudestaan, arvon toteutumisprosentti taipuu kohti tätä todennäköisyyttä.

Stokastisuuden perinteinen merkintätapa on alleviivaus.

Stokastisen muuttujan arvojoukko voi olla *diskreetti* tai *jatkuva*.

Diskreetin stokastisen muuttujan esimerkkejä ovat

- Nopanheitto. Jokainen heitto on yksi realisaatio. Tässä tapauksessa $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, diskreetti arvojoukko. Rehelliselle nopalle $p(k) = \frac{1}{6}$, $k = 1, \dots, 6$. Kuten sana "rehellinen" antaa uskoa, noppaa voidaan käyttää puolueettomana ratkaisuvälineenä esimerkiksi lautapelissä.
- Kolikonheitto. $x_i \in \{0, 1\}$, $0 = \text{kruuna}$, $1 = \text{klaava}$. Myös kolikoita käytetään puolueettomaan päätöksentekoon, esimerkiksi jalkapallopelin alussa.

- o Tuotteen laatukoe: hyväksytään tai hylätään, $x_i \in \{0, 1\}$. Ero kolikonheittoon on, että rehelliselle kolikolle $p(0) = p(1) = 0,5$. Laatukokeen tapauksessa ei ole vastaavaa ehtoa. Valmistaja haluaa vain, että $p(1)$, hylkäyksen todennäköisyys, on pieni.
- o Pankin lähettämät tunnusluvut, kun asioi käyttäen tunnuslukulaitetta. $x_i \in \{\mathbb{N} | x_i < N\}$. Erikoista tässä tapauksessa on, että arvojoukko on diskreetti, mutta sen koko N on suuri. Satunnaisuuden tarkoituksena on estää onnekasta arvailua.

Mittaus on yleensä reaaliarvoinen eli jatkuva stokastinen muuttuja.

Mittauksen esimerkkejä:

- o Mitattu etäisyys on reaaliarvoinen eli jatkuva stokastinen muuttuja s . Realisaatiot eli mittausarvot $s_i, i = 1, \dots$ ovat määrittelyjoukossa $\{s \in \mathbb{R} | s > 0\}$, positiiviset reaalityluvut¹.
- o GNSS:n tuottama vektorimittaus pisteestä A pisteeseen B on stokastinen vektorimuuttuja \underline{x} . Jokainen realisaatio, joka koostuu kolmesta komponentista, kuuluu kolmiulotteiseen vektoriavaruuteen: $x_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, \dots$
- o Mitattu vaakakulma α , realisaatiot $\alpha_i \in [0, 2\pi), i = 1, 2, \dots$. Esimerkkinä kulmamittaus teodoliitilla, jolloin määrittelyjoukko on $\{\alpha \in \mathbb{R} | 0 \leq \alpha < 2\pi\}$, reaaliarvojen osajoukko².

Jatkuvien stokastisten muuttujien tapauksessa puhutaan todennäköisyysstiheydestä eikä tietyn toteutumisarvon x todennäköisyydestä, koska sen tarkan toteutumisen todennäköisyys on nolla. Todennäköisyys, että realisaatio on tietyn välin $I = (x_1, x_2)$ sisällä, lasketaan integraalina

$$p(I) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

Usein kohdataan *kumulatiivinen* todennäköisyysstiheysjakauma, integraali

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^x p(x') dx'. \quad (2.1)$$

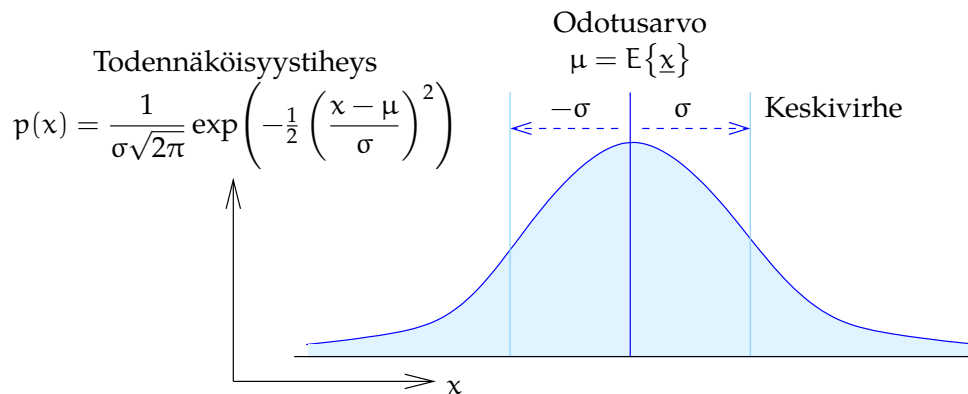
Tällä määritelmällä

$$p(I) = P(x_2) - P(x_1).$$

¹Tarkemmin: *rationaaliarvojen* osajoukko, $\{s \in \mathbb{Q} | s > 0\}$. Ei ole mahdollista mitata reaaliarvoja ja äärellisellä desimaalien lukumäärällä kirjoittaa niitä ylös.

²Tarkemmin: *rationaaliarvojen* osajoukko, $\{\alpha \in \mathbb{Q} | 0 \leq \alpha < 2\pi\}$.





KUVA 2.1. Gaussin kellokäyrä eli normaalijakauma.

Jos oletetaan, että todennäköisyysjakauma on *normaali* eli Gaussin³ kellokäyrä, kuva 2.1, on sen yhtälö

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad (2.2)$$

Gauss

jossa σ on jakauman keskivirhe eli keskihajonta ja μ sen odotusarvo. Molemmat suureet määritellään myöhemmin.



2.1.2 Stokastiset prosessit ja aikasarjat

Stokastinen *prosessi* on stokastinen muuttuja, jonka arvojoukko on *funktioavaruus*: stokastisen muuttujan jokainen realisaatio ("nopanheitto") on kokonainen funktio.

Funktion argumentti on tavallisesti aika t , mutta mahdollisesti myös paikka (φ, λ) Maan pinnalla.

Aikasarja on stokastisesta prosessista saatu diskreetti arvojen sarja. Sarja saadaan otannan avulla erikoistamalla argumentti t tiettyihin enemmän tai vähemmän säännöllisin välein valittuihin arvoihin $t_j, j = 1, 2, \dots$. Toisin sanoen aikasarja on stokastinen prosessi säännöllisesti mitattuna.

Stokastista prosessia — tai aikasarjaa — kutsutaan *stationaariseksi*, jos sen tilastolliset ominaisuudet eivät muutu, vaikka argumentti t korvattaisiin argumentilla $t + \Delta t$.

Stokastisten prosessien esimerkkejä:

- Koelaitteen lämpötila $\underline{I}(t)$ ajan t funktiona. Eri realisaatiot $T_i(t)$ saadaan toistamalla koetta: $i = 1, 2, \dots$

³Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) oli saksalainen matemaatikko ja yleisnero. "Princeps mathematicorum".

- Helsingin Kaisaniemen sääaseman lämpötila $T^{\text{Kais}}(t)$. Historiaa ei voida toistaa tarkasti: tästä stokastisesta prosessista on olemassa vain yksi realisaatio $T_1^{\text{Kais}}(t)$, Kaisaniemen historiallinen aikasarja. Muut realisaatiot $T_i^{\text{Kais}}(t)$, $i = 2, 3, \dots$ ovat olemassa vain teoreettisina konstruktioina.

Historia ei toistu, mutta *ergodisille* prosesseille se riittää. Usein oletetaan, että tilastollisten ominaisuuksien tutkimisen tulos on sama, jos käytetään eri realisaatioina *samaa prosessia siirrettynä ajassa*. Esimerkiksi

$$T_{i+1}(t) = T_i(t + \Delta t),$$

jossa Δt on aikasiirtymä, jonka valinta riippuu tutkimuksen kohteesta. Esimerkkinä toimivat hyvin Kaisaniemen aikasarjat eri vuosina. Tätä oletusta kutsutaan *ergodisuushypoteesiksi*.



2.2 Otoskeskiarvo



2.2.1 Yleistä

Usein kohdataan tilanne, jossa jokin suure x on mitattu useita kertoja, ja siksi käytettävissä on tietyn stokastisen mittasuureen x useita realisaatioita.

Toki kaikki realisaatiot poikkeavat eri tavalla ”oikeasta” arvosta x , jota emme tunne. Jos tuntisimme, ei mittauksia tarvittaisi! Suureen realisaatioilla voidaan laskea suureen x ”mahdollisimman hyvä” arvio käytettävissä olevien mittausarvojen perusteella. Näitä laskentamenetelmiä kutsutaan *estimointimenetelmiksi*.

Estimaatti on itse *estimaattorin realisaatio*: estimaattori on itse stokastinen suure, jonka realisaatiot ovat estimaatteja.

Stokastisen suureen arvojoukolla, kaikkien mahdollisten arvojen x joukolla, on määritetty *todennäköisyystiheysfunktio* $p(x)$. Tämä funktio edustaa todennäköisyyttä, että erään realisaation arvo sattuisi olemaan kapean välin sisällä x :n ympäri jaettuna välin leveydellä. Se on myös kumulatiivisen todennäköisyystiheysfunktion $P(x)$, yhtälö 2.1, derivaatta.

Usein oletetaan, että $p(x)$ on niin sanotun *Gaussin käyrän* eli normaalijakauman eli ”kellokäyrän” muotoinen, yhtälö 2.2 ja kuva 2.1. Alla esitetyt tulokset eivät riipu Gaussin jakauman oletuksesta ellei toisin ole mainittu.

Koska muuttujalla x on oltava *jokin* arvo, seuraa, että kokonaistodennäköisyys on 1 eli prosenteissa 100 %:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Odotusarvon E määritelmä on

$$E\{\underline{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx.$$

Odotusarvo ei ole sama kuin keskiarvo: odotusarvo on teoreettinen käsite, kun puolestaan keskiarvo lasketaan mittauksista. Niiden välillä on kuitenkin olemassa tärkeä yhteys: muuttujan \underline{x} ensimmäisen n realisaation keskiarvo,

$$\bar{x}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.3)$$

on todennäköisesti sitä lähempänä odotusarvoa $E\{\underline{x}\}$, mitä suurempi n on. Tätä kokemusperäistä lakia kutsutaan *suurten lukujen* empiiriseksi laiksi.

Yhtälön 2.3 ensimmäisen n realisaation joukkoa kutsutaan *otokseksi* ja $\bar{x}^{(n)}$ otoskeskiarvoksi.

Nyt kun odotusarvo on määriteltä, määritellään seuraavaksi *varianssi*:

$$\text{Var}\{\underline{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})^2\right\}.$$

Varianssin neliöjuuri on keskihajonta eli keskivirhe σ , katso kuva 2.1:

$$\sigma^2 = \text{Var}\{\underline{x}\}.$$

Varianssi on odotusarvon tapaan teoreettinen suure, jota ei voida täsmällisesti tuntea. Se voidaan kuitenkin *estimoida* otoksesta $x_i, i = 1, \dots, n$. Jos otoskeskiarvo $\bar{x}^{(n)}$ on jo laskettu, on varianssin σ^2 estimaattori

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^{(n)})^2.$$

Koska otanta voidaan mielivaltaisesti toistaa, on otoskeskiarvo $\bar{x}^{(n)}$ myös itse stokastinen suure,

$$\bar{\underline{x}}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i,$$



jossa \underline{x}_i on stokastinen suure, jonka peräkkäiset realisaatiot ovat yksinkertaisesti $(\underline{x}_i)_j, j = 1, 2, \dots$, jossa j on uusi realisaatiolaskuri.

Jos annettuna on \underline{x}_i , voidaan esimerkiksi muodostaa $\bar{x}_j^{(n)} = (\underline{x}_i)_j \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}_{i+n(j-1)}$ ("kampasuure"). Asian selkeyttämiseksi oletetaan, että otoksen koko on $n = 10$. Silloin otoskeskiarvo stokastisena suurena on $\bar{x}^{(10)}$ ja sen peräkkäiset realisaatiot ovat

$$\bar{x}_1^{(10)} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \underline{x}_i, \quad \bar{x}_2^{(10)} = \frac{1}{10} \sum_{i=11}^{20} \underline{x}_i, \quad \bar{x}_3^{(10)} = \frac{1}{10} \sum_{i=21}^{30} \underline{x}_i, \quad \dots$$

On intuitiivisesti selvää — ja teemme oletuksen ilman todistusta — että

$$E\{\underline{x}_i\} = E\{\underline{x}\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Suureen $\bar{x}^{(n)}$ odotusarvo on

$$E\{\bar{x}^{(n)}\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{\underline{x}_i\} = E\{\underline{x}\},$$

eli suureen \underline{x} odotusarvo. Tällaista estimaattoria kutsutaan *harhattomaksi*.

Sen varianssi estimoidaan yhtälöllä

$$\widehat{\text{Var}}\{\bar{x}^{(n)}\} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{x}^{(n)})^2 = \frac{1}{n} \hat{\sigma}^2.$$

Toisin sanoen otoskeskiarvon keskivirhe pienenee suhteessa $1/\sqrt{n}$, kun otoksen koko n kasvaa.

Tämä kaikki on esitetty ilman todistuksia, jotka löytyvät tilastotieteen oppikirjoista.



2.2.2 Keskiarvon optimaalisuus

Kaikista harhattomista suureen \underline{x} estimaattoreista, jotka perustuvat otokseen $\underline{x}_i, i = 1, \dots, n$:

$$\hat{\bar{x}} = \left\{ \sum_{i=1}^n w_i \underline{x}_i \mid \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right\},$$

keskiarvo

$$\hat{\bar{x}} = \bar{x}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i \tag{2.4}$$

minimoi sen varianssin. Kasautumislain mukaan varianssi on

$$\text{Var}\{\bar{x}^{(n)}\} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \text{Var}\{\underline{x}_i\} = \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_i^2,$$



jossa oletettiin, että \underline{x}_i eivät korreloi keskenään ja että $\text{Var}\{\underline{x}_i\} = \sigma^2$.

Nyt ilmaisun

$$\left\{ \sum_{i=1}^n w_i^2 \mid \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right\}$$

rajoitettu minimointi antaa

$$w_i = \frac{1}{n},$$

josta väite seuraa. Kertoimia w_i kutsutaan *painoiksi*, ja tilannetta, jossa ne ovat kaikki yhtä suuria, kutsutaan painottamattomaksi keskiarvotukseksi.



2.2.3 Otoskeskiarvon laskeminen askel kerrallaan

Otoskeskiarvo (2.4) on mahdollista laskea myös *askel kerrallaan* seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}^{(n+1)} &= \frac{n}{n+1} \bar{\underline{x}}^{(n)} + \frac{1}{n+1} \underline{x}_{n+1}, \\ \text{Var}\{\bar{\underline{x}}^{(n+1)}\} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \text{Var}\{\bar{\underline{x}}^{(n)}\} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sigma^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Tämä on yksinkertainen perättäisen lineaarisen suotimen eli *Kalmanin suotimen* (luku 3) esimerkki. Tällä menetelmällä voidaan laskea suureen $\bar{\underline{x}}^{(n)}$ arvo ”lennossa”, kun havaintoja on vielä tulossa. Jokaisen uuden havainnon jälkeen ei siis jouduta enää käsittelemään havaintojen koko joukkoa uudelleen. Tämä on Kalmanin suotimen käytön etu.

Yhtälöt 2.5 voidaan ymmärtää myös painotettuna keskiarvona tähän asti tehtyjen havaintojen ja uuden havainnon välillä:

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}^{(n+1)} &= W \bar{\underline{x}}^{(n)} + w \underline{x}_{n+1}, \\ \text{Var}\{\bar{\underline{x}}^{(n+1)}\} &= W^2 \text{Var}\{\bar{\underline{x}}^{(n)}\} + w^2 \sigma^2, \end{aligned}$$

jossa

$$w = \frac{1}{n+1}, \quad W = \sum_{k=1}^n w = \frac{n}{n+1}, \quad W + w = 1.$$



2.3 Kovarianssi ja korrelaatio



2.3.1 Määritelmät ja ominaisuudet

Kun annettuna on kaksi stokastista suuretta \underline{x} ja \underline{y} , on niiden välinen *kovarianssi*

$$\text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} \stackrel{\text{def}}{=} E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})(\underline{y} - E\{\underline{y}\})\right\}.$$





TAULUKKO 2.1. Todennäköisyydet (%) olla yhden, kahden ja kolmen sigman rajojen ulkopuolella yhden, kahden ja kolmen ulottuvuuden tapauksessa.

	σ	2σ	3σ
Yksi ulottuvuus (väli)	31,7	4,6	0,3
Kaksi ulottuvuutta (ellipsi)	60,6	13,5	1,1
Kolme ulottuvuutta (ellipsoidi)	80,1	26,1	2,9

Kovarianssi kuvaa, kuinka vahvoja suureiden \underline{x} ja \underline{y} yhteiset satunnaiset vaihtelut ovat.

Kovarianssin lisäksi määritellään *korrelaatio*:

$$\text{Corr}\{\underline{x}, \underline{y}\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\}}{\sqrt{\text{Var}\{\underline{x}\} \text{Var}\{\underline{y}\}}}. \quad (2.6)$$

Korrelaatio ei voi koskaan olla suurempi kuin 1,0 tai pienempi kuin $-1,0$. Eric Weisstein antaa seuraavan todistuksen ([Wolfram MathWorld, Statistical Correlation](#)). Määrittele normalisoidut suureet

$$\underline{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{x}}{\sqrt{\text{Var}\{\underline{x}\}}}, \quad \underline{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{y}}{\sqrt{\text{Var}\{\underline{y}\}}}.$$

Varianssien kasautumislain mukaan

$$\text{Cov}\{\underline{\xi}, \underline{\eta}\} = \frac{\text{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\}}{\sqrt{\text{Var}\{\underline{x}\} \text{Var}\{\underline{y}\}}} = \text{Corr}\{\underline{x}, \underline{y}\}.$$

Seuraavat varianssit ovat positiivisia:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}\{\underline{\xi} + \underline{\eta}\} = \text{Var}\{\underline{\xi}\} + \text{Var}\{\underline{\eta}\} + 2 \text{Cov}\{\underline{\xi}, \underline{\eta}\}, \\ 0 &\leq \text{Var}\{\underline{\xi} - \underline{\eta}\} = \text{Var}\{\underline{\xi}\} + \text{Var}\{\underline{\eta}\} - 2 \text{Cov}\{\underline{\xi}, \underline{\eta}\}. \end{aligned}$$

Kun lisäksi

$$\text{Var}\{\underline{\xi}\} = \frac{\text{Var}\{\underline{x}\}}{\sqrt{\text{Var}\{\underline{x}\} \text{Var}\{\underline{x}\}}} = 1$$

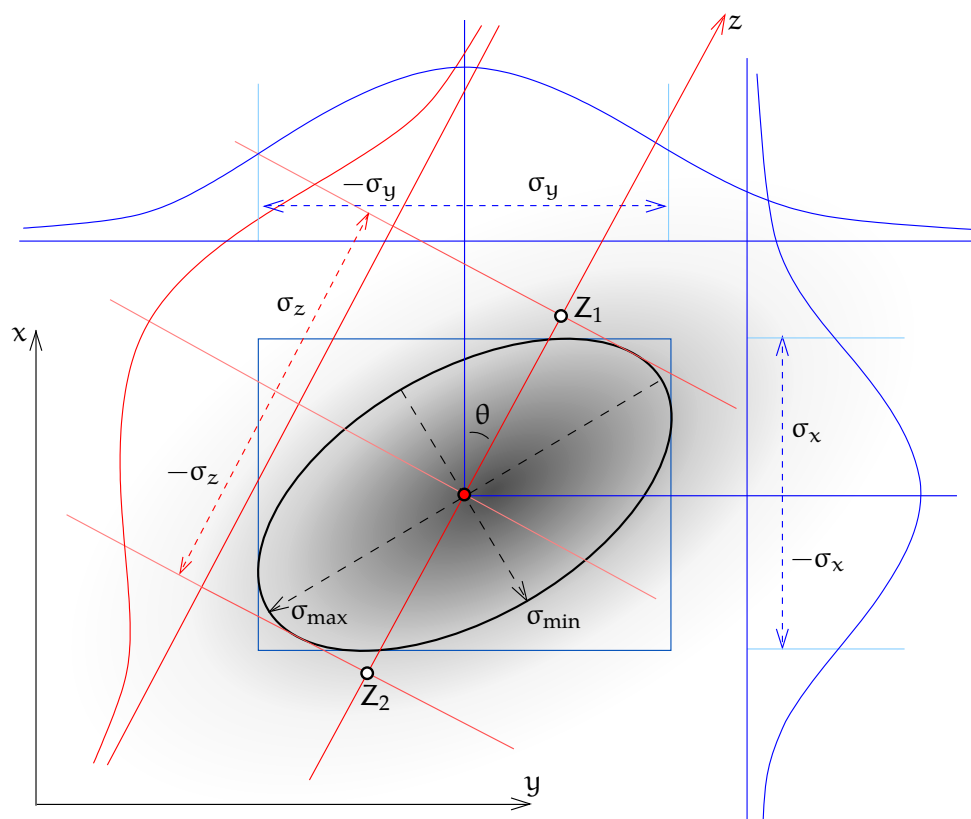
ja samoin $\text{Var}\{\underline{\eta}\} = 1$, seuraa, että

$$-1 \leq \text{Cov}\{\underline{\xi}, \underline{\eta}\} = \text{Corr}\{\underline{x}, \underline{y}\} \leq 1.$$

Usein ilmaistaan korrelaatio prosentteina: 100 % on sama kuin arvo 1,0.

Kahden stokastisen suureen tapauksessa voidaan piirtää *virhe-ellipsi*, kuva 2.2. Vertaa tätä kuvaa aikaisempaan kellokäyrän kuvaan 2.1.





KUVA 2.2. Virhe-ellipsi ja todennäköisyystiheysjakaumia. Varjostus kuvailee todennäköisyystiheyttä.

Siihen on merkitty odotusarvo $E\{\underline{x}\}$ (keskellä) ja keskivirhe $\pm\sigma$. Virhe-ellipsikuvassa 2.2 ellipsin keskipiste edustaa suureiden \underline{x} ja \underline{y} odotusarvoja. Ellipsi itse vastaa keskivirhearvoihin $\pm\sigma$.

Mittausarvot sijoittuvat tietyillä todennäköisyyksillä ellipsin sisälle tai ulkopuolelle: tästä virhe-ellipsi saa nimensä. Nämä todennäköisyydet eivät kuitenkaan ole samoja yksiulotteisella välillä $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, kaksiulotteisella ellipsillä tai kolmiulotteisella virhe-ellipsoidilla. Katso taulukko 2.1.

2.3.2 Korrelaatio, virhe-ellipsi ja regressio

Jos ellipsin leikkaa suora z , saadaan suureiden \underline{x} ja \underline{y} lineaariyhdistelmä:

$$\underline{z} = \underline{x} \cos \theta + \underline{y} \sin \theta.$$

Pisteet Z_1, Z_2 , joissa suora leikkaa ellipsin projisoivat tangentit, edustavat suureen \underline{z} keskivirhettä⁴:

$$\text{Var}\{\underline{z}\} = E\left\{(\underline{z} - E\{\underline{z}\})^2\right\} =$$



$$\begin{aligned}
&= E \left\{ \left(\cos \theta (\underline{x} - E\{\underline{x}\}) + \sin \theta (\underline{y} - E\{\underline{y}\}) \right)^2 \right\} = \\
&= \cos^2 \theta \operatorname{Var}\{\underline{x}\} + 2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} + \sin^2 \theta \operatorname{Var}\{\underline{y}\},
\end{aligned}$$

ja tästä $\sigma_z = \sqrt{\operatorname{Var}\{\underline{z}\}}$. Suuntakulman θ funktiona keskivirheellä $\sigma_z(\theta)$ on kaksi ääriarvoa: σ_{\min} ja σ_{\max} . Katso kuva 2.2.

Jos $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$, tai jos koordinaatiston akselit osoittavat ääriarvojen σ_{\min} ja σ_{\max} suuntiin, korrelaatio suureiden \underline{x} ja \underline{y} välillä häviää. Siinä tapauksessa ne ovat toisistaan riippumattomia ja toisen todellisen arvon tunteminen ei auta toisen estimoinnissa.

Jos korrelaatio ei häviä, suureen \underline{x} todellisen arvon — tai sen hyvän estimaatin — tunteminen auttaa estimoimaan suurta \underline{y} paremmin. Menetelmää kutsutaan *regressioksi*.



2.3.3 Korrelaation huomiotta jättämisen vaikutus

Jos on annettuna kaksi stokastista suuretta \underline{x}_1 ja \underline{x}_2 , voidaan laskea painotettu keskiarvo:

$$\bar{\underline{x}} = w_1 \underline{x}_1 + w_2 \underline{x}_2,$$

jossa w_1 ja w_2 ovat painot ja oletetaan, että $w_1 + w_2 = 1$. Tämän lineaariyhdistelmän varianssi on

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\{\bar{\underline{x}}\} &= w_1^2 \sigma_1^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2^2 \sigma_2^2 = \\
&= w_1^2 \sigma_1^2 + 2 w_1 (1 - w_1) \sigma_{12} + (1 - w_1)^2 \sigma_2^2, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

jossa $\sigma_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Var}\{\underline{x}_1\}$, $\sigma_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Var}\{\underline{x}_2\}$ ja $\sigma_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Cov}\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$.

⁴Matriisimerkintätavalla voidaan kirjoittaa

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$$

ja

$$\operatorname{Var} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \operatorname{Var}\{\underline{x}\} & \operatorname{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} \\ \operatorname{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} & \operatorname{Var}\{\underline{y}\} \end{bmatrix}.$$

Tästä seuraa

$$\operatorname{Var}\{\underline{z}\} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{Var}\{\underline{x}\} & \operatorname{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} \\ \operatorname{Cov}\{\underline{x}, \underline{y}\} & \operatorname{Var}\{\underline{y}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix},$$

sama tulos. Tämä on *varianssien kasautumislain* esimerkki.



Optimaalinen on stationaarinen piste, jossa w_1 :n derivaatta häviää:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dw_1} \text{Var}\{\bar{x}\} &= 2w_1\sigma_1^2 + 2(1-2w_1)\sigma_{12} - 2(1-w_1)\sigma_2^2 = 0 \\ \implies w_1(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) - w_2(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) &= 0.\end{aligned}$$

Optimaaliset painot ovat nyt

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}.$$

Erikoistapauksessa⁵, jossa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2$, optimaaliset painot ovat $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$.

Jättämällä keskinäinen tilastollinen riippuvuus σ_{12} huomioimatta saadaan optimaaliseksi painoiksi

$$w'_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad w'_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Myös tässä, jos $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, silloin $w'_1 = w'_2 = \frac{1}{2}$.

Jos jätetään σ_{12} huomioimatta, saadaan keskiarvon varianssiksi

$$\begin{aligned}\text{Var}'\{\bar{x}\} &= (w'_1)^2 \sigma_1^2 + (w'_2)^2 \sigma_2^2 = \\ &= w'_1 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sigma_1^2 + w'_2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sigma_2^2 = (w'_1 + w'_2) \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.\end{aligned}$$

Tapauksessa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ tämä antaa

$$\text{Var}'\{\bar{x}\} = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Tosiasiallinen varianssi on kuitenkin, yhtälö 2.7:

$$\begin{aligned}\text{Var}\{\bar{x}\} &= ((w'_1)^2 \sigma_1^2 + (w'_2)^2 \sigma_2^2) + 2w'_1 w'_2 \sigma_{12} = \\ &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + 2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sigma_{12} = \\ &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \left(1 + 2 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) = \\ &= \text{Var}'\{\bar{x}\} \left(1 + 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \right) = \\ &= \text{Var}'\{\bar{x}\} \left(1 + 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \text{Corr}\{x_1, x_2\} \right).\end{aligned}$$

⁵Tämä erikoistapaus saadaan normalisoimalla $\xi_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1/\sigma_1$, $\xi_2 \stackrel{\text{def}}{=} x_2/\sigma_2$.

Tapauksessa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ tämä antaa

$$\text{Var}\{\bar{x}\} = \text{Var}'\{\bar{x}\} \left(1 + \text{Corr}\{x_1, x_2\}\right).$$

Tekijä $v \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \text{Corr}\{x_1, x_2\}$ ilmaistaan usein ”tehollisena otoskokona” muodossa

$$n_{\text{teh}} = \frac{n}{v},$$

jossa n on otoksen tosiasiallinen koko, tässä tapauksessa $n = 2$.

Jos korrelaatio on $\text{Corr}\{x_1, x_2\} = 0,8$, saadaan $v = 1,8$, $\text{Var}\{\bar{x}\} = 1,8 \cdot \text{Var}'\{\bar{x}\}$ ja $n_{\text{teh}} = 2/1,8 = 1,111 \dots$

Tämä voidaan helposti laajentaa n arvon x_i , $i = 1, \dots, n$ tapaukseen, jossa varianssit ovat identtisesti σ^2 . Keskiarvo on ($w_i = 1/n$, $i = 1, \dots, n$):

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n w_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

ja keskiarvon varianssi on

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\bar{x}\} &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma^2 + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n w_j w_k \sigma_{jk} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n \sigma^2 \frac{\sigma_{jk}}{\sigma^2} = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n \text{Corr}\{x_j, x_k\}\right) = \\ &= \text{Var}'\{\bar{x}\} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n \text{Corr}\{x_j, x_k\}\right). \end{aligned}$$

Mielenkiintoisessa erikoistapauksessa korrelaatiot ovat vakion $\rho \in (0, 1)$ indeksietäisyyden mukaan alenevat potenssit:

$$\text{Corr}\{x_j, x_k\} = \rho^{|j-k|}.$$

Määritelmällä⁶ $m \stackrel{\text{def}}{=} |j - k|$:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\bar{x}\} &= \text{Var}'\{\bar{x}\} \left(1 + \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-m} \rho^m\right) = \\ &= \text{Var}'\{\bar{x}\} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{n-m}{n} \rho^m\right). \end{aligned}$$

⁶Varianssimatriisilla on kummallakin puolella $n - 1$ sivulävistäjää, joiden pituudet ovat $n - m$.



Silloin limiitissä $n \rightarrow \infty$:

$$\text{Var}\{\bar{x}\} \approx \text{Var}'\{\bar{x}\} \left(1 + 2\frac{\rho}{1-\rho}\right) = \text{Var}'\{\bar{x}\} \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Tästä opittu läksy on, että korrelaation läsnä ollessa stokastiset suureet sisältävät vähemmän *riippumatonta* tietoa kuin miltä näyttää. Korrelaation sivuuttaminen aiheuttaa, että uskomme tietävämme enemmän kuin tosiasiallisesti tiedämme. Lienee selvää, miksi tämä on vaarallista.

Tässä esitetty analyysi voidaan yleistää moniin muihin estimaattoreihin keskiarvon lisäksi. Lisää tehollisesta otoskoosta sovellettuna ajassa korreloiviin aikasarjoihin kerrotaan alaosiossa **2.4.2**.



2.4 Aikasarjojen lineaarinen regressio

Tosielämässä, kuten on mainittu jo alaosiossa **2.1.2**, stokastiset prosessit ovat aina *aikasarjoja*, joissa on annettu vain diskreettien ajanhetkien eli *epookkien* arvoja. Usein sellaiset prosessit käyttäytyvät melko lineaarisesti ajassa, ja tätä lineaarista käytöstä kannattaa tutkia regression avulla. Samalla on muistettava joitakin varoituksia.



2.4.1 Pienimmän neliösumman regressio ilman autokorrelaatiota

Lineaarisen regression lähtökohta on tunnettu yhtälö

$$y = a + bx,$$

ja on annettu joukko pisteparia (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Halutaan määrittää vakiotermin a ja kulmakertoimen eli trendin b . Tämä on itse asiassa *havaintoyhtälö*

$$\underline{y}_i = a + bx_i + \underline{n}_i,$$

jossa stokastinen prosessi \underline{n}_i kuvaa mittausprosessin *satunnaista virhettä* eli *kohinaa*.

Toinen tapa kirjoittaa havaintoyhtälö on

$$\underline{y}_i + \underline{v}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i,$$

jossa \underline{v}_i on havainnon \underline{y}_i residuaali eli *jäännösvirhe* ja \hat{a} ja \hat{b} ovat tuntemattomien a ja b estimaattorit.

Oletetaan, että havaintojen kohinan varianssi on vakio, eli se ei riipu arvosta i ("homoskedastisuus"), ja että kovarianssi häviää kaikkialla⁷

⁷Nämä havaintoja koskevat oletukset käyvät nimellä *i.i.d.*, "independent and identically distributed". Tämä sisältää lisäoletuksen, että kaikkien havaintojen jakaumat ovat samanmuotoisia.

(”valkoinen kohina”):

$$\begin{aligned}\text{Var}\{\underline{n}_i\} &= \sigma^2, \\ \text{Cov}\{\underline{n}_i, \underline{n}_j\} &= 0, \quad i \neq j.\end{aligned}$$

Tätä kutsutaan *tilastolliseksi malliksi*.

Havaintoyhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix},$$

jossa $\underline{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 & \underline{y}_2 & \cdots & \underline{y}_n \end{bmatrix}^T$ on havaintojen ja $\underline{v} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix}^T$ jäännösvirheiden vektori n -ulotteisessa abstraktissa vektoriavaruudessa. $\hat{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} \end{bmatrix}^T$ on tuntemattomien (parametrien) vektori. Lopuksi

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

on *rakennematriisi*. Tätä esitystapaa kutsutaan *funktiomalliksi*⁸:

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{\mathbf{x}}.$$

Käyttäen oletettua tilastollista mallia voidaan laskea pienemmän neliösumman ratkaisu *normaaliyhtälön* avulla⁹:

$$(A^T A) \hat{\mathbf{x}} = A^T \underline{\ell}.$$

Normaalimatriisi on

$$A^T A = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix},$$

⁸Vaihtoehtoinen ja suosittu merkitätapa on $\underline{y} = \beta X + \underline{\varepsilon}$, jossa X ovat *selittävät* eli *riippumattomat* muuttujat, \underline{y} *selitettävät* eli *riippuvat* muuttujat eli *vaste-* tai *tulosmuuttujat* ja β malliparametrit.

Vastaavuus on $\underline{y} \sim \underline{\ell}$, $X \sim A$ ja $\beta \sim \mathbf{x}$, muttei $\underline{\varepsilon} \sim -\underline{v}$. $\underline{\varepsilon} = \underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{n}_1 & \underline{n}_2 & \cdots & \underline{n}_n \end{bmatrix}^T$ on *virheiden* vektori, kun \underline{v} on *jäännösvirheiden* vektori.

⁹Vastaavasti

$$(X^T X) \hat{\beta} = X^T \underline{y}.$$



eli Cramerin säännön mukaan

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix}.$$

Tästä seuraa

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{\mathbf{y}} = (A^T A)^{-1} \begin{bmatrix} \sum \underline{\mathbf{y}} \\ \sum x \underline{\mathbf{y}} \end{bmatrix}$$

ja

$$\hat{a} = \frac{\sum x^2 \sum \underline{\mathbf{y}} - \sum x \sum x \underline{\mathbf{y}}}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad \hat{b} = \frac{-\sum x \sum \underline{\mathbf{y}} + n \sum x \underline{\mathbf{y}}}{n \sum x^2 - (\sum x)^2},$$

jotka ovat tuntemattomien pienimmän neliösumman *estimaattorit*. Niiden tarkkuudet — epävarmuudet eli keskivirheet — seuraavat muodollisen virheiden kasautumisen kautta käännetyn normaalimatriisin $(A^T A)^{-1}$ pääälävistäjäalkioiden neliöjuureista. Neliöjuuret tulee skaalata kertoimella σ , painoyksikön keskivirhe. Tulos on:

$$\sigma_a = \sigma \sqrt{\frac{\sum x^2}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}}, \quad \sigma_b = \sigma \sqrt{\frac{n}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}}. \quad (2.8)$$

Useimmiten olemme kiinnostuneet nimenomaan trendistä b , jolloin tulee verrata saatua arvoa \hat{b} sen oman keskivirheen σ_b kanssa. Jos σ ei ole *a priori* tiedossa, sen tulee arvioida *jäännösvirheistä*: jäännösvirheiden neliöiden summalla

$$\sum \underline{\mathbf{v}}^2 = \sum (\hat{a} + \hat{b}x - \underline{\mathbf{y}})^2$$

on odotusarvo $(n - 2) \sigma^2$, jossa $n - 2$ on *vapausasteiden* määrä eli ylimääritys, kun 2 on estimoitujen tuntemattomien määrä. Siis

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \underline{\mathbf{v}}^2}{n - 2}$$

on suureen σ^2 harhaton estimaattori.



2.4.2 Autokorrelaatio ajassa

Yllä tehty oletus, että havaintovirheet $\underline{\mathbf{n}}_i$ eivät korreloi keskenään, on usein *väärä*. Pienimmän neliösumman regressio on kuitenkin niin yksinkertainen menetelmä ja saatavissa esimerkiksi suosituissa taulukkolaskentaohjelmissa ja tieteellisen laskennan ohjelmissa, että sitä



käytetään usein silloinkin, kun nollakorrelaatio-olettamus ei pidä paikkaansa.

Jos kohinaprosessin \underline{w}_i autokorrelaatio ei häviä, se voidaan usein mallintaa Gaussin ja Markovin prosessina. Sellaista prosessia kuvataan diskreettina *Markovin ketjuna*:

$$\underline{w}_{i+1} = \rho \underline{w}_i + \underline{n}_i, \quad (2.9)$$

jossa¹⁰ $\rho = \text{Corr}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\}$ on sopiva vaimennusparametri, $0 < \rho < 1$, ja \underline{n}_i on oikeasti ei-korreloiva valkoisen kohinan prosessi:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\underline{n}_i\} &= \sigma_n^2, \\ \text{Cov}\{\underline{n}_i, \underline{n}_j\} &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Seuraa yhtälöstä 2.9 ja siitä, että $\text{Cov}\{\underline{w}_i, \underline{n}_i\} = 0$, että

$$\sigma_w^2 = \rho^2 \sigma_w^2 + \sigma_n^2 \implies \sigma_w^2 = \frac{\sigma_n^2}{1 - \rho^2}. \quad (2.11)$$

Kirjoita alkuperäinen havaintoyhtälö

$$\underline{y}_i = a + b x_i + \underline{w}_i$$

ylös kaksi kertaa, toisella kerralla kerrottuna tekijällä $-\rho$:

$$\begin{aligned} \underline{y}_{i+1} &= a + b x_{i+1} + \underline{w}_{i+1}, \\ -\rho \underline{y}_i &= -\rho a - \rho b x_i - \rho \underline{w}_i, \end{aligned}$$

ja laske yhteen:

$$\underline{y}_{i+1} - \rho \underline{y}_i = a(1 - \rho) + b(x_{i+1} - \rho x_i) + (\underline{w}_{i+1} - \rho \underline{w}_i).$$

Tämä yhtälö on muotoa

$$\underline{Y}_i = A + bX_i + \underline{n}_i,$$

¹⁰Koska

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\} &= \text{Cov}\{(\rho \underline{w}_i + \underline{n}_i), \underline{w}_i\} = \rho \text{Var}\{\underline{w}_i\} \\ \implies \rho &= \frac{\text{Cov}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\}}{\text{Var}\{\underline{w}_i\}} = \frac{\text{Cov}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\}}{\sqrt{\text{Var}\{\underline{w}_{i+1}\} \text{Var}\{\underline{w}_i\}}} = \text{Corr}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\} \end{aligned}$$

stationaarisuuden perusteella: $\text{Var}\{\underline{w}_i\} = \text{Var}\{\underline{w}_{i+1}\} = \sigma_w^2$.



ei-korreloidun lineaarisen regression yhtälö, jossa \underline{n}_i on *valkoinen* kohina, yhtälö 2.10, ja

$$\begin{aligned} A &= a(1 - \rho), \\ X_i &= x_{i+1} - \rho x_i, \\ \underline{Y}_i &= \underline{y}_{i+1} - \rho \underline{y}_i. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Lähestymistapa tunnetaan Cochranen ja Orcuttin menetelmänä. (Wikipedia, [Cochrane-Orcutt estimation](#)). Laskentaohje on nyt:

- 1) Laske X_i ja \underline{Y}_i yllä olevien yhtälöiden 2.12 mukaan.
- 2) Ratkaise \hat{A} ja \hat{b} ei-korreloidun lineaarisen regressiomenetelmän mukaisesti. Menetelmä kuvattiin alaosiossa 2.4.1.
- 3) Voidaan laskea $\hat{a} = \hat{A} / (1 - \rho)$.
- 4) Ei-korreloitu lineaarinen regressiomenetelmä antaa keskivirheet estimaattoreille \hat{A} ja \hat{b} .
- 5) Tavallisesti σ_b on suurempi kun laskemisessa otetaan huomioon autokorrelaatio, kuin ilman sitä. Samalla pienempi on myös suhde \hat{b} / σ_b , testausuure, joka kertoo, eroaako trendi b merkittävästi nolasta.

Syynä on se, että havainnot *sisältävät vähemmän tietoa* tuntemattomista kuin luulemme. Jokainen aikasarjan uusi tietopiste ei sisälläkään kaikkea sitä tietoa kuin luulemme, koska se tarjoaa osittain samaa tietoa kuin aiemmat pisteet.

Koska aikasarja oletetaan tasaväliseksi, seuraa, koska $\Delta X = X_{i+1} - X_i$ ja $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, että $\Delta X = (1 - \rho) \Delta x$. Jos sen lisäksi käytämme ”massakeskipistekoordinaatteja” eli

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i = \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

seuraa myös, että

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 \approx (1 - \rho)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Nyt yhtälöstä 2.8:

$$\sigma_b = \sigma \sqrt{\frac{1}{\sum x^2}}$$

saadaan yhtälön 2.11 avulla:

$$\text{Var}\{\hat{b}\} = \frac{\sigma_n^2}{\sum X^2} = \frac{1}{(1 - \rho)^2} \frac{\sigma_n^2}{\sum x^2}, \quad \text{Var}'\{\hat{b}\} = \frac{\sigma_w^2}{\sum x^2} = \frac{1}{1 - \rho^2} \frac{\sigma_n^2}{\sum x^2},$$



siis

$$\text{Var}\{\hat{b}\} = \text{Var}'\{\hat{b}\} \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho)^2} = \text{Var}'\{\hat{b}\} \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

”Tehollinen otoskoko” n_{teh} on pienempi kuin todellinen lukumäärä n , kertoimella (Lettenmaier, 1976):

$$v = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Esimerkiksi jos $\rho = 0,8$, tämä nyrkkisääntö sanoo, että $v = 9$! Tilanne on sama kuin, jos meillä olisi vain yhdeksäsosa tietopisteiden oikeasta määrästä.

Tässä tapauksessa kaikki keskivirheet, jotka on laskettu naiivisti käyttämällä tavallista pienimmän neliösumman regressiota ilman autokorrelaatiota, on kerrottava tämän kertoimen v neliöjuurella: ne kolminkertaistuvat. Tämä pätee erityisesti trendin estimaattorin \hat{b} keskivirheelle σ_b .

Opittavaa tästä on:

- Jos datassa on autokorrelaatio ajassa, yksinkertainen lineaari-regressio antaa *liian optimistisen kuvan* trendiparametrin \hat{b} keskivirheestä ja siitä, kuinka merkittävästi se eroaa nolasta. Tässä tapauksessa voidaan käyttää edellä mainittua Cochranen ja Orcuttin menetelmää. Autokorrelaation esiintymisen arviointi voidaan tehdä visuaalisesti tarkastelemalla jäännösvirheitä. Autokorrelaation ρ oikean arvon löytäminen on oma haasteensa.
- Jos data on annettu ajan tasavälisenä aikasarjana, $x_i = x_0 + (i - 1) \Delta t$, Markovin ketjun parametri ρ liittyy yksinkertaisella tavalla sen *korrelaatiopituuteen*. Yhtälöstä 2.9 seuraa

$$\underline{w}_{i+1} = \rho \underline{w}_i + \underline{n}_i \implies \underline{w}_{i+1} = \underline{w}_i e^{-\Delta t / \tau} + \underline{n}_i,$$

jossa τ on korrelaatiopituus ilmaistuna aikayksiköissä:

$$\tau = -\Delta t / \ln \rho.$$

Ajassa korreloitujen havaintojen yleinen regressio-ongelma on *painotetun* pienemmän neliösumman menetelmän esimerkki.



2.5 Stokastisen prosessin auto- ja ristikovarianssi



2.5.1 Autokovarianssi

Tavallisen stokastisen suureen sijasta tutkimme seuraavaksi stokastista *prosessia* $\underline{x}(t)$. Johdannaisfunktio nimeltä *autokovarianssi*, jolla on kaksi



aika-argumenttia t ja t' , voidaan laskea seuraavasti:

$$A_x(t, t') \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{x}(t')\}.$$

Stationaariset prosessit ovat prosesseja, joiden tilastolliset ominaisuudet eivät muutu ajassa: ominaisuudet eivät riipu absoluuttisesta ajasta, vaan pysyvät samana ajankin myötä. Stationaarisille prosesseille pätee, määritelmän $t' = t + \Delta t$ kanssa, että

$$A_x(t, t') = A_x(t, t + \Delta t) = \text{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{x}(t + \Delta t)\} \stackrel{\text{def}}{=} A_x(\Delta t), \quad (2.13)$$

riippumatta ajan t arvosta.

Autokovarianssifunktiota $A_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} A_x(t, t)$ kutsutaan yksinkertaisesti prosessin $\underline{x}(t)$ varianssifunktioksi. Stationaarisille prosesseille se on vakio $A_x = A_x(0)$.

Stationaarisen prosessin autokovarianssifunktio on symmetrinen:

$$\begin{aligned} A_x(\Delta t) = A_x(t, t') &= \text{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{x}(t')\} = \text{Cov}\{\underline{x}(t'), \underline{x}(t)\} = \\ &= A_x(t', t) = A_x(-\Delta t). \end{aligned} \quad (2.14)$$



2.5.2 Ristikovarianssi

Jos on kaksi eri stokastista prosessia $\underline{x}(t)$ ja $\underline{y}(t)$, saadaan johdannaisfunktio nimeltä *ristikovarianssi*:

$$C_{xy}(t, t') \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{y}(t')\}.$$

Stationaaristen prosessien tapauksessa taas

$$C_{xy}(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{y}(t + \Delta t)\}. \quad (2.15)$$

Huomaa, että $A_x(\Delta t) = A_x(-\Delta t)$, mutta (yleensä)

$$C_{xy}(\Delta t) \neq C_{xy}(-\Delta t) !$$

Usein termi ristikovarianssi tarkoittaa yksinkertaisesti

$$C_{xy}(t) \stackrel{\text{def}}{=} C_{xy}(t, t) = \text{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{y}(t)\}.$$

Stationaarisille prosesseille tämä on vakio: $C_{xy}(t) = C_{xy}(0) = C_{xy}$.



2.5.3 Auto- ja ristikorrelaatio

Näin määriteltyjen kovarianssien perusteella voidaan tuttuun tapaan määritellä myös auto- ja ristikorrelaatiofunktiot. *Autokorrelaatio* on

$$\text{Corr}_x(t, t') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_x(t, t')}{\sqrt{A_x(t, t) A_x(t', t')}}, \quad \text{Corr}_x(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_x(\Delta t)}{A_x(0)}, \quad (2.16)$$

ja *ristikorrelaatio*

$$\text{Corr}_{xy}(t, t') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_{xy}(t, t')}{\sqrt{A_x(t, t) A_y(t', t')}}, \quad \text{Corr}_{xy}(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_{xy}(\Delta t)}{\sqrt{A_x(0) A_y(0)}},$$

joissa yhtälöt oikealla olettavat stationaarisuutta.

Yhtälöstä 2.16 näkyy, että jos $\Delta t = 0$, autokorrelaatio on 1. Muussa tapauksessa se on aina välillä $[-1, +1]$, kuten todistettiin jo yhtälön 2.6 yhteydessä. Myös ristikorrelaatio on aina välillä $[-1, +1]$, mutta yleensä $\text{Corr}_{xy}(0) \neq 1$!

2.5.4 Nollakeskeiset stationaariset prosessit

Tutkitaan stationaarisia prosesseja, joiden odotusarvo häviää:

$$E\{\underline{x}(t)\} = E\{\underline{y}(t)\} = 0.$$

Silloin on olemassa seuraava hyödyllinen integraaliyhtälö ristikovarianssifunktiolle:

$$C_{xy}(\Delta t) = E\{\underline{x}(t) \underline{y}(t + \Delta t)\} = \frac{1}{T} E\left\{\int_0^T \underline{x}(t) \underline{y}(t + \Delta t) dt\right\}. \quad (2.17)$$

Tämä sanoo, että voidaan laskea integraali-ilmaisu

$$\frac{1}{T} \int_0^T \underline{x}(t) \underline{y}(t + \Delta t) dt$$

prosessien $\underline{x}(t)$ ja $\underline{y}(t)$ havainnoista äärellisellä aikavälillä $[0, T]$ ja käyttää sitä harhattomana funktion $C_{xy}(\Delta t)$ estimaattorina. Käytännössä prosessin otanta tapahtuisi diskreetisti, tuloksena aikasarja.

Tässä pätee suurten lukujen lain erikoistapaus:

$$T \rightarrow \infty \xrightarrow{\text{stok}} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{x}(t) \underline{y}(t + \Delta t) dt \rightarrow C_{xy}(\Delta t).$$

Huomaa, että tässä laskennassa käytetään vain yhtä prosessien $\underline{x}(t)$ ja $\underline{y}(t)$ realisaatiota eikä realisaatioiden joukkoa. Sitä, että tämä on sallittu, kutsutaan *ergodisuudeksi*.





2.5.5 Ristikovarianssi ja konvoluutio

Ympyräkonvoluutiointegraalin määritelmä on

$$x \otimes_T y \stackrel{\text{def}}{=} \oint_0^T x(t-t') y(t') dt'. \quad (2.18)$$

Määritelmässä oletetaan, että x ja y ovat jaksollisia jaksolla T . Siksi samanarvoinen määritelmä on

$$x \otimes_T y = \oint_{-T/2}^{T/2} x(t-t') y(t') dt'.$$

Tämä ympyräkonvoluutio lähestyy tavallista konvoluutiota limiitissä $T \rightarrow \infty$:

$$x \otimes y = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t') y(t') dt'.$$

Käytännössä suurilla T :n arvoilla ne voidaan katsoa samanarvoisiksi, ja jaksollisuuden vaatimus väistyy.

Integraali 2.17 on samannäköinen kuin ympyräkonvoluutiointegraali 2.18. Määritelmällä $\tau \stackrel{\text{def}}{=} t' - t$ saadaan (ympyrä on ympyrä!):

$$x \otimes_T y = \oint_0^T x(-\tau) y(t+\tau) dt' = \oint_0^T x(-\tau) y(t+\tau) d\tau.$$

Sijoita $\tau \rightarrow t$ ja $t \rightarrow \Delta t$:

$$x \otimes_T y = \int_0^T x(-t) y(t+\Delta t) dt.$$

Tämä on miinusmerkkiä vaille sama kuin yhtälön 2.17 integraali. Seuraa

$$C_{xy}(\Delta t) = \frac{1}{T} E \left\{ x(-t) \otimes_T y(t) \right\}.$$

Yleisessä teoriassa, jossa prosessit ovat kompleksiarvoisia, ristikovarianssi, yhtälö 2.15, määritellään seuraavaksi:

$$C_{xy}(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cov} \{ \underline{x}^\dagger(t), \underline{y}(t+\Delta t) \},$$

jossa symboli \dagger merkitsee kompleksikonjugaattia eli liittolukua. Silloin integraalista 2.17 tulee

$$C_{xy}(\Delta t) = \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T x^\dagger(t) y(t+\Delta t) dt \right\} = \frac{1}{T} E \left\{ x^\dagger(-t) \otimes_T y(t) \right\}.$$

Tietysti samalla tavalla autokovarianssifunktio on silloin

$$A_x(\Delta t) = \text{Cov} \{ \underline{x}^\dagger(t), \underline{x}(t+\Delta t) \} = \frac{1}{T} E \left\{ x^\dagger(-t) \otimes_T x(t) \right\}. \quad (2.19)$$

Ympyräkonvoluutiolla on se hyödyllinen ominaisuus, että se voidaan laskea tehokkaasti nopean Fourier'n muunnoksen (FFT) avulla.





2.6 Valkoinen kohina ja satunnaiskulku



2.6.1 Valkoinen kohina

Kohina voidaan määritellä stokastiseksi prosessiksi, jonka odotusarvo on nolla:

$$E\{\underline{n}(t)\} = 0.$$

Valkoinen kohina on kohinaa, joka koostuu tasaisesti kaikista mahdollisista taajuuksista¹¹. Matemaattinen kuvaustapa on sanoa, että autokovarianssi

$$A_n(\Delta t) = 0,$$

jos $\Delta t \neq 0$. Toisin sanoen prosessin arvojen $\underline{n}(t)$ ja $\underline{n}(t')$ välillä ei ole yhtään korrelaatiota, vaikka $\Delta t = t' - t$ olisi kuinka lähellä nollaa. Kuitenkin

$$A_n(0) = \infty.$$

Lisäksi pätee

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_n(\tau) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} Q_n,$$

jossa Q_n on äärellinen reaaliarvo.

Yllä olevia yhtälöitä kannattaa pohtia jonkin aikaa. Tämä on funktio $A_n(\tau)$, joka on ”melkein kaikkialla” nolla. Nimittäin kaikkialla, jossa $\tau \neq 0$, mutta ainoassa pisteessä, jossa se ei ole nolla — piste $\tau = 0$ — se on ääretön! Ja vielä lisäksi funktion *integraali* määrittelyjoukkonsa \mathbb{R} yli tuottaa äärellisen arvon Q_n !



2.6.2 Deltafunktio

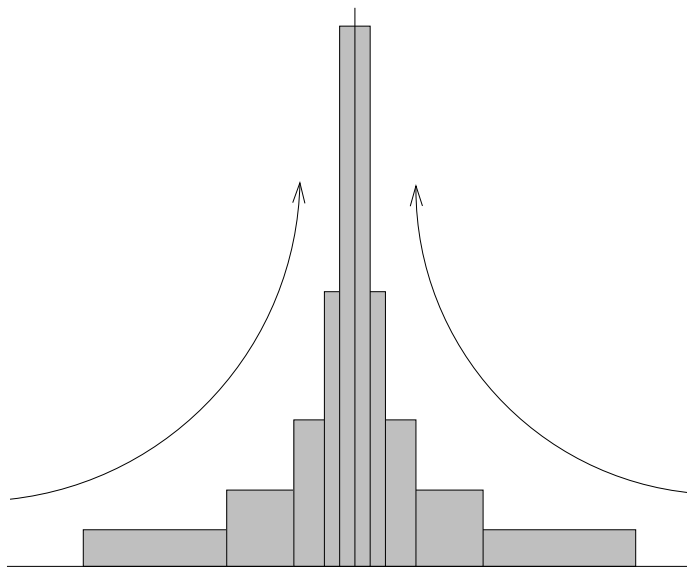
Sellaista funktiota ei ole olemassakaan. Sen sijaan on olemassa matemaattinen apuväline, kvantifysikko Paul Diracin¹² mukaan nimetty *deltafunktio* eli -distribuutio:

$$A_n(\Delta t) = Q_n \delta(\Delta t). \quad (2.20)$$

Intuitiivisesti voidaan ymmärtää, miten sellainen ”funktio” rakennetaan, kuva 2.3.

¹¹Nimi perustuu analogiaan valkoisesta valosta, jonka tiedetään Newtonin ansiosta (Davidson ja Tchourioukanov) koostuvan kaikista näkyvän valon taajuuksista.

¹²Paul Adrien Marie Dirac OM FRS (1902–1984) oli johtava brittiläinen teoreettinen fyysikko ja kvanttifysiikan kehittäjä.



Kuva 2.3. Diracin deltafunktio blokkifunktioiden limiittinä.

Määritellään ensin seuraava blokkifunktio:

$$\delta_\epsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{jos } \tau > \frac{1}{2}\epsilon \text{ tai } \tau < -\frac{1}{2}\epsilon, \\ 1/\epsilon & \text{jos } -\frac{1}{2}\epsilon \leq \tau \leq \frac{1}{2}\epsilon. \end{cases}$$

Selvästi tämän funktion integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(\tau) d\tau = 1$$

ja $\delta_\epsilon(\tau) = 0$ jos $|\tau|$ on riittävän suuri.

Annetaan $\epsilon \rightarrow 0$. Tässä limiitissä $\delta_\epsilon(0) \rightarrow \infty$, ja mille tahansa arvolle $\tau \neq 0$ löytyy aina raja-arvo ϵ , jolle pätee $|\tau| > \frac{1}{2}\epsilon \implies \delta_\epsilon(\tau) = 0$.

Deltafunktioilla on sellainen tärkeä *toisto-ominaisuus*, että mielivaltaiselle funktiolle f ,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') f(t') dt' \iff f = \delta \otimes f. \quad (2.21)$$

Siis konvoluutio deltafunktion kanssa on funktioavaruuden neutraali operaattori. Hieman samalla tavalla kertominen yksikkömatriisin eli Kroneckerin deltatensorin kanssa — sama symboli! — on vektoriavaruuden neutraali operaattori.

Distributioiden käsittelysääntö on yksinkertaisesti, että ensin integroidaan ja vasta sen jälkeen saadulle tulokselle annetaan $\epsilon \rightarrow 0$.





2.6.3 Satunnaiskulku

”Random walk” eli satunnaiskulku syntyy, kun valkoista kohinaa integroidaan ajassa:

$$\frac{d}{dt} \underline{w}(t) = \underline{n}(t), \quad (2.22)$$

jossa $\underline{w}(t)$ on satunnaiskulku ja $\underline{n}(t)$ on valkoista kohinaa.

Olkoon kohinan \underline{n} autokovarianssi yhtälön 2.20 mukaan

$$A_n(\Delta t) = Q_n \delta(\Delta t),$$

jossa Q_n on yllä määritelty kohinan \underline{n} varianssi.

Integroidaan tämä funktio, jolloin saadaan *satunnaiskulun* eli Wienerin¹³ prosessi¹⁴:

$$\underline{w}_0(t) = \int_{t_0}^t \underline{n}(\tau) d\tau.$$

Integroinnin alkuaika t_0 on lisätty alaindeksiksi 0, koska \underline{w} riippuu siitä.

Huomaa, että

$$E\{\underline{w}_0(t)\} = \int_{t_0}^t E\{\underline{n}(\tau)\} d\tau = 0.$$

Autokovarianssifunktio saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} A_{w,0}(t, t') &= E\left\{(\underline{w}_0(t) - E\{\underline{w}_0(t)\})(\underline{w}_0(t') - E\{\underline{w}_0(t')\})\right\} = \\ &= E\{\underline{w}_0(t) \underline{w}_0(t')\} = \\ &= E\left\{\int_{t_0}^t \underline{n}(\tau) d\tau \int_{t_0}^{t'} \underline{n}(\tau') d\tau'\right\} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \overbrace{E\{\underline{n}(\tau') \underline{n}(\tau)\}}^I d\tau' d\tau. \end{aligned}$$

Tässä integraali

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t'} E\{\underline{n}(\tau') \underline{n}(\tau)\} d\tau' = \int_{t_0}^{t'} A_n(\tau - \tau') d\tau' = \\ &= Q_n \int_{t_0}^{t'} \delta(\tau - \tau') d\tau' = \begin{cases} Q_n & \text{jos } t' > \tau, \\ 0 & \text{jos } t' \leq \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

¹³Norbert Wiener (1894–1964) oli amerikanjuutalainen matemaatikko ja filosofi sekä kybernetiikan perustaja.

¹⁴Tarkkaan ottaen Wienerin prosessi on erikoistapaus, joka on normaalisti jakautunut ja jossa $Q_n = 1$.

Seuraa, että

$$\begin{aligned} A_{w,0}(t, t') &= Q_n \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{t'} \delta(\tau - \tau') d\tau' \right) d\tau = \\ &= Q_n \cdot (t' - t_0) + 0 \cdot (t - t') = Q_n \cdot (t' - t_0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tässä on oletettu, että kohinafunktion \underline{n} autokovarianssi on *stationaarinen*, toisin sanoen, että Q_n on vakio. Tämä voidaan yleistää tapaukselle, jossa $Q_n(t)$ on ajan funktio:

$$A_{w,0}(t, t') = \int_{t_0}^{t'} Q_n(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

Kummassakin yhtälössä (2.23, 2.24) oletetaan $t' \leq t$.

On tärkeää huomauttaa, että satunnaiskulkuprosessi on *epästationaarinen*: varianssi

$$\text{Var}\{\underline{w}_0(t)\} = A_{w,0}(t, t) = Q_n \cdot (t - t_0)$$

kasvaa ilman rajaa ajassa t .



2.7 Värillinen kohina

Seuraavaksi tutkitaan yksinkertaista differentiaaliyhtälöä ajassa

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = -k\underline{x}(t) + \underline{n}(t), \quad (2.25)$$

jossa $\underline{n}(t)$ on valkoinen kohina, jonka autokovarianssifunktio on $Q_n \delta(\Delta t)$. Q_n ja k ovat vakioita.

Näin kuvattua prosessia kutsutaan *stationaariseksi Gaussin ja Markovin*¹⁵ *prosessiksi*. Satunnaiskulun yhtälöön 2.22 verrattuna prosessi sisältää termin $-k\underline{x}(t)$, eli vaikutuksen, joka ajaa \underline{x} :n takaisin nollaan vastoin kohinan \underline{n} hajauttavaa vaikutusta.

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$\underline{x}(t) = e^{-kt} \left(\underline{x}(t_0) e^{kt_0} + \int_{t_0}^t \underline{n}(\tau) e^{k\tau} d\tau \right) \quad (2.26)$$

¹⁵ Andrei Andrejevitch Markov (1856–1922) oli venäläinen matemaatikko, jonka stokastisia prosesseja koskevat tutkimukset olivat merkittäviä.

kuten voidaan todentaa sijoittamalla. Leibnizin tulosäännön avulla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overbrace{x(t)}^{x(t)} &= -k e^{-kt} \left\{ \underline{x}(t_0) e^{kt_0} + \int_{t_0}^t \underline{n}(\tau) e^{k\tau} d\tau \right\} + \\ &\quad + e^{-kt} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{t_0}^t \underline{n}(\tau) e^{k\tau} d\tau \right\} = \\ &= -k \underline{x}(t) + e^{-kt} \underline{n}(t) e^{kt} = -k \underline{x}(t) + \underline{n}(t). \end{aligned}$$

Ratkaisu täyttää myös alkuehdon.

Jos oletetaan, että alkuarvo $\underline{x}(t_0)$ on virheetön ja että kohinan \underline{n} autokovarianssifunktio on

$$A_n(t, t') = Q_n \delta(t - t'),$$

saadaan ratkaisusta 2.26 suureen \underline{x} kovarianssifunktio:

$$\begin{aligned} A_x(t, t') &= e^{-k(t+t')} E \left\{ \int_{t_0}^{t'} \underline{n}(\tau') e^{k\tau'} d\tau' \int_{t_0}^t \underline{n}(\tau) e^{k\tau} d\tau \right\} = \\ &= e^{-k(t+t')} \int_{t_0}^{t'} e^{k\tau'} \overbrace{\int_{t_0}^t E \{ \underline{n}(\tau') \underline{n}(\tau) \} e^{k\tau} d\tau}^I d\tau'. \end{aligned}$$

Tässä integraali

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^t E \{ \underline{n}(\tau') \underline{n}(\tau) \} e^{k\tau} d\tau = \int_{t_0}^t A_n(\tau', \tau) e^{k\tau} d\tau = \\ &= Q_n \int_{t_0}^t \delta(\tau - \tau') e^{k\tau} d\tau = \begin{cases} Q_n e^{k\tau'} & \text{jos } t > \tau', \\ 0 & \text{jos } t < \tau'. \end{cases} \end{aligned}$$

Siis tapauksessa $t' > t$:

$$\begin{aligned} A_x(t, t') &= Q_n e^{-k(t+t')} \left(\int_{t_0}^t e^{2k\tau'} d\tau' + \int_t^{t'} 0 d\tau' \right) = \\ &= \frac{Q_n}{2k} e^{-k(t+t')} (e^{2kt} - e^{2kt_0}), \end{aligned}$$

ja tapauksessa $t' \leq t$:

$$A_x(t, t') = Q_n e^{-k(t+t')} \int_{t_0}^{t'} e^{2k\tau'} d\tau' = \frac{Q_n}{2k} e^{-k(t+t')} (e^{2kt'} - e^{2kt_0}).$$

Molemmissa tapauksissa saadaan

$$A_x(t, t') = \frac{Q_n}{2k} \left(e^{-k|t-t'|} - e^{-k(t+t'-2t_0)} \right). \quad (2.27)$$



Tapaus, jossa $t, t' \gg t_0$ eli stationaarinen tila, johon järjestelmä asettuu kauan käynnistämisen jälkeen ja jossa alkutila $\underline{x}(t_0)$ on unohtunut, antaa

$$A_x(t, t') \stackrel{\text{def}}{=} A_x(t - t') \approx \frac{Q_n}{2k} e^{-k|t-t'|} = \frac{Q_n}{2k} e^{-k|\Delta t|} = A_x(0) e^{-k|\Delta t|}. \quad (2.28)$$

Tässä tapauksessa puhutaan *värillisestä kohinasta*¹⁶, ja näin saatua prosessia kutsutaan stationaariseksi *Gaussin ja Markovin prosessiksi*.

Puhutaan myös ensimmäisen kertaluvun autoregressiivisestä eli **AR(1)**-prosessista, vaikka tavallisesti se tarkoittaa diskreettiä jonoa eli aikasarjaa. Olkoon ensimmäisen kertaluvun autoregressiivinen jono \underline{x}_i , jossa jokainen jäsen riippuu vain jonon edellisestä jäsenestä:

$$\underline{x}_{i+1} = \rho \underline{x}_i + \underline{n}_i, \quad (2.29)$$

jossa $\underline{x}_i \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}(t_i)$ ja $\underline{x}_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}(t_{i+1})$. Jos $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} t_{i+1} - t_i$ on pieni, vertailu yhtälön 2.25 kanssa antaa $\rho \approx (1 - k \Delta t)$.

Yhtälö 2.29 on *Markovin ketjun* esimerkki, jossa jokainen jonon eli ketjun jäsen \underline{x}_{i+1} voidaan laskea käyttämällä vain edellistä jäsentä \underline{x}_i . Samalla jokainen ketjun jäsen voidaan ennustaa optimaalisesti käyttämällä vain edellistä jäsentä. Vanhempia jäseniä \underline{x}_j , $j < i$ ei ole mukana. Markovin ketju on siis *muistiton*. Tätä kutsutaan Markovin ominaisuudeksi.

Määritellään

$$\tilde{Q}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k^2} Q_n.$$

Pinta-ala A_x -käyrän alla on

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(\tau) d\tau &= \frac{\tilde{Q}_n k^2}{2k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|\tau|} d\tau = \frac{\tilde{Q}_n k}{2} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-k\tau} d\tau = \\ &= -\tilde{Q}_n \left[e^{-k\tau} \right]_0^{\infty} = \tilde{Q}_n, \end{aligned}$$

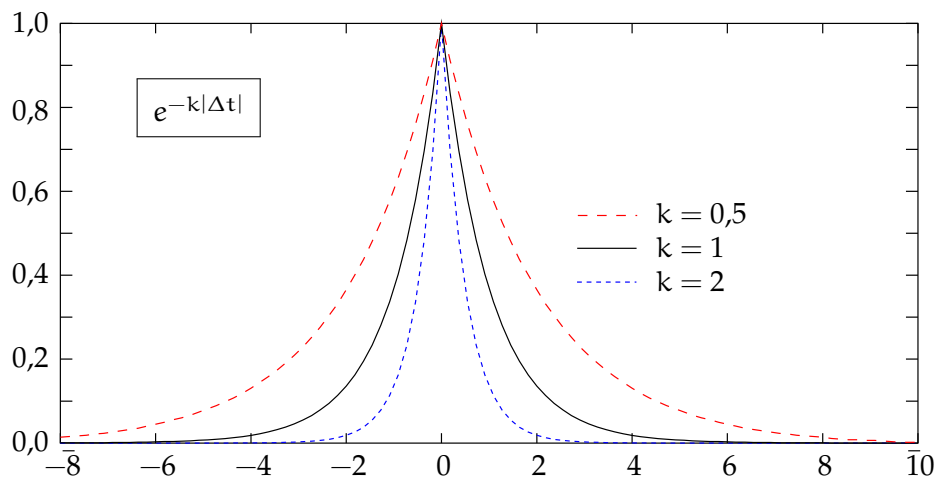
josta k on hävinnyt.

- o Rajatapauksessa $k \rightarrow \infty$ muutetaan autokovarianssifunktio A_x yhä kapeammaksi, mutta pidetään pinta-ala funktion käyrän alla samana. Silloin

$$\tilde{A}_x(t - t') \rightarrow \tilde{Q}_n \delta(t - t'). \quad (2.30)$$

¹⁶Nimi perustuu vertauskuvaan värillisen valon epätasaisesta kirkkausjakaumasta taajuuden mukaan.





KUVA 2.4. Stationaarisen Gaussin ja Markovin prosessin autokovarianssifunktion aikaeron $\Delta t = t - t'$ funktiona. Oletettu on $A_x(0) = Q_n/2k = 1$.

Yhtälö 2.30 vastaa yhtälön 2.25 degeneraatiota, jossa ei vain $k \rightarrow \infty$, vaan myös kohinan varianssi $Q_n \rightarrow \infty$. Seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = -k\underline{x}(t) + \underbrace{\frac{d}{dt}\underline{n}(t)}_{\underline{\tilde{n}}(t)} \implies \underline{x}(t) = \underline{\tilde{n}}(t) - \frac{1}{k} \frac{d}{dt}\underline{x}(t).$$

Limittissä $k \rightarrow \infty$ tästä tulee

$$\underline{x}(t) = \underline{\tilde{n}}(t),$$

jossa "skaalatulla" kohinalla

$$\underline{\tilde{n}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k} \underline{n}(t)$$

on äärellinen varianssi

$$\tilde{Q}_n = \frac{1}{k^2} Q_n,$$

mikä on yhteensopiva autokovarianssiyhtälön 2.30 kanssa.

- Toinen rajatapaus, $k \rightarrow 0$, on *satunnaiskulku*, joka esitettiin jo alaosiossa 2.6.3. Se on siis Gaussin ja Markovin prosessi, jonka aikavakio on äärettömän pitkä. Siinä tapauksessa on käytettävä koko yhtälöä 2.27:

$$A_{x,0}(t, t') = \frac{Q_n}{2k} \left(e^{-k|t-t'|} - e^{-k(t+t'-2t_0)} \right).$$

Tässä tapauksessa, jos $t \approx t' \stackrel{\text{def}}{=} \bar{t}$, saadaan

$$A_{x,0}(\bar{t}) = \frac{Q_n}{2k} \left(1 - e^{-2k(\bar{t}-t_0)} \right) \approx Q_n \cdot (\bar{t} - t_0),$$





TAULUKKO 2.2. Eri stokastisten prosessien ominaisuuksien yhteenveto.

	k	Yhtälö	Autokovarianssi
Satunnaiskulku	0	$\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{n}$	$Q_n \cdot (t - t_0)$
Gaussin ja Markovin prosessi	$\in (0, \infty)$	$\frac{d}{dt}\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{n}$	$\frac{Q_n}{2k} e^{-k t-t' }$
Valkoinen kohina	∞	$\underline{x} = \underline{n}$	$Q_n \delta(t - t')$

eli sama tulos kuin saatiin alaosiossa 2.6.3.

Differentiaaliyhtälö saadaan yhtälöstä 2.25 sijoittamalla $k = 0$:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{n}(t),$$

eli \underline{x} on valkoisen kohinan \underline{n} aikaintegraali, yhtälö 2.22.

Taulukko 2.2 antaa Gaussin ja Markovin prosessin ja sen rajatapauksen pääominaisuuksien yhteenvedon.

Usein yhtälön 2.25 mallia käytetään ”värillisen” kohinan prosessissa silloin, kun tiedetään etukäteen, että prosessin ominaisuudet ovat sen tyyppisiä. Tämä onnistuu, kun lisätään yksi tuntematon tuntemattomien vektorille ja yksi yhtälö yhtälöryhmälle. Osiossa 4.4 nähdään, miten se tehdään Kalmanin suotimen yhteydessä.



2.8 Tehon spektraalitiheys (PSD)



2.8.1 Määritelmä

Usein haluamme tutkia stokastisia prosesseja *spektraalisesti* eli mikä eri taajuusosuuksia prosessi sisältää. Tämä voidaan tehdä Fourier'n¹⁷ muunnoksen avulla.

b^u fourier

Autokovarianssifunktion Fourier'n muunnosta stationaariselle prosessille kutsutaan nimellä tehon spektraalitiheys eli *power spectral density* (PSD). Valitaan $t' = 0$ aika-akselin mielivaltaisen origon kiinnittämiseksi niin, että $\Delta t = t - t' = t$. Saadaan (Wienerin, Khinchinin¹⁸ ja Einsteinin lause):

$$\mathcal{A}_x(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\{A_x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) e^{-2\pi i f t} dt, \quad (2.31)$$

¹⁷Joseph Fourier (1768–1830) oli ranskalainen matemaatikko ja fyysikko, joka muistetaan parhaiten Fourier-sarjojen löytämisestä.

¹⁸Aleksandr Yakovlevitš Khinchin (1894–1959) oli neuvostoliittolainen matemaatikko ja todennäköisyysteorian kehittäjä.

Yhtälö 2.13

jossa $A_x(t) = A_x(\Delta t)$ (yhtälö 2.13) ja olettaen, että integraali on olemassa. Tässä f on *taajuus*, yksikkönä Hz (Heinrich Hertzin¹⁹ mukaan), siis kierroksia tai värähtelyjä tai jaksoja sekunnissa eli s^{-1} .

Analogisesti voidaan määrittää myös kahden funktion risti-PSD:

$$C_{xy}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\{C_{xy}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(t) e^{-2\pi i f t} dt.$$

Käänteinen operaatio käyttämällä Fourier'n käänteismuunnosta antaa

$$A_x(\Delta t) = A_x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{A_x(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(f) e^{2\pi i f t} df.$$

Siksi $t = 0$ antaa

$$A_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(f) df,$$

siis prosessin x varianssi on sama kuin kokonaispinta-ala sen PSD-käyrän alla, siis prosessin kokonaisteho.

Autokovarianssifunktio on symmetrinen, yhtälö 2.14. Seuraa, että PSD, yhtälö 2.31, on reaaliarvoinen ja myös symmetrinen:

$$\begin{aligned} A_x(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) (\cos(-2\pi i f t) + i \sin(-2\pi i f t)) dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} A_x(t) \cos(2\pi f t) dt. \end{aligned}$$

Tämän lisäksi se on kaikkialla ei-negatiivinen, katso liite A.

Risti-PSD:lle tämä ei päde, koska se ei ole symmetrinen:

$$C_{xy}(t, t') = C_{yx}(t', t) \neq C_{xy}(t', t).$$



2.8.2 Gaussin ja Markovin prosessi

Gaussin ja Markovin prosessin autokovarianssifunktio on yhtälön 2.28 antama:

$$A_x(\Delta t) = \frac{Q_n}{2k} e^{-k|\Delta t|}.$$

¹⁹Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894) oli saksalaisfyysikko ja ensimmäinen, joka tuotti ja havaitsi radioaaltoja.

Tästä saadaan PSD-funktio integroimalla yhtälön 2.31 mukaan, taas valitsemalla $t' = 0$ eli $\Delta t = t$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_x(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) e^{-2\pi i f t} dt = \frac{Q_n}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|t|} e^{-2\pi i f t} dt = \\
 &= \frac{Q_n}{2k} \int_0^{\infty} (e^{-kt-2\pi i f t} + e^{-kt+2\pi i f t}) dt = \\
 &= \frac{Q_n}{2k} \left[\frac{1}{-k-2\pi i f} e^{(-k-2\pi i f)t} + \frac{1}{-k+2\pi i f} e^{(-k+2\pi i f)t} \right]_0^{\infty} = \\
 &= \frac{Q_n}{2k} \frac{1}{k^2 + 4\pi^2 f^2} \begin{bmatrix} (-k+2\pi i f) & (-k-2\pi i f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[e^{(-k-2\pi i f)t} \right]_0^{\infty} \\ \left[e^{(-k+2\pi i f)t} \right]_0^{\infty} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{Q_n}{2k} \frac{1}{k^2 + 4\pi^2 f^2} \begin{bmatrix} -k & 2\pi i f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[e^{-kt} (2 \cos(2\pi f t)) \right]_0^{\infty} \\ \left[e^{-kt} (-2i \sin(2\pi f t)) \right]_0^{\infty} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{Q_n}{2k} \frac{1}{k^2 + 4\pi^2 f^2} \begin{bmatrix} -k & 2\pi i f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Q_n}{4\pi^2 f^2 + k^2}.
 \end{aligned}$$

Voidaan myös kirjoittaa

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_x(f) &= \frac{Q_n}{2k} \int_0^{\infty} e^{-kt} (e^{-2\pi i f t} + e^{2\pi i f t}) dt = \\
 &= \frac{Q_n}{k} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cos(2\pi f t) dt
 \end{aligned}$$

ja kokeilla integraalitulokot ([Wolfram Functions](#), $\int e^{bx} \cos cx \, dx$) tai symbolisen laskennan ohjelmistot, kuten Wolfram Researchin online-integraattori. Tulos on myös²⁰

$$\mathcal{A}_x(f) = \frac{Q_n}{4\pi^2 f^2 + k^2} = A_x(0) \frac{2k}{4\pi^2 f^2 + k^2}. \quad (2.32)$$

Katso [Jekeli \(2001\)](#) yhtälö (6.75). Kuvan 2.5 arvot on laskettu olettamalla $Q_n = 2k$, siis pitämällä suureen \underline{x} varianssi, joka on $A_x(0) = Q_n/2k$, arvolla 1 riippumatta k :n arvosta. Näin pinta-ala käyrän alla on vakio.

Tässä on selitettävä, miksi taajuudella f on negatiivisia arvoja. Käytettyssä Fourier'n integraalissa kantafunktiot ovat kompleksisia, tyyppi $e^{2\pi i f t}$. Silti voidaan kirjoittaa

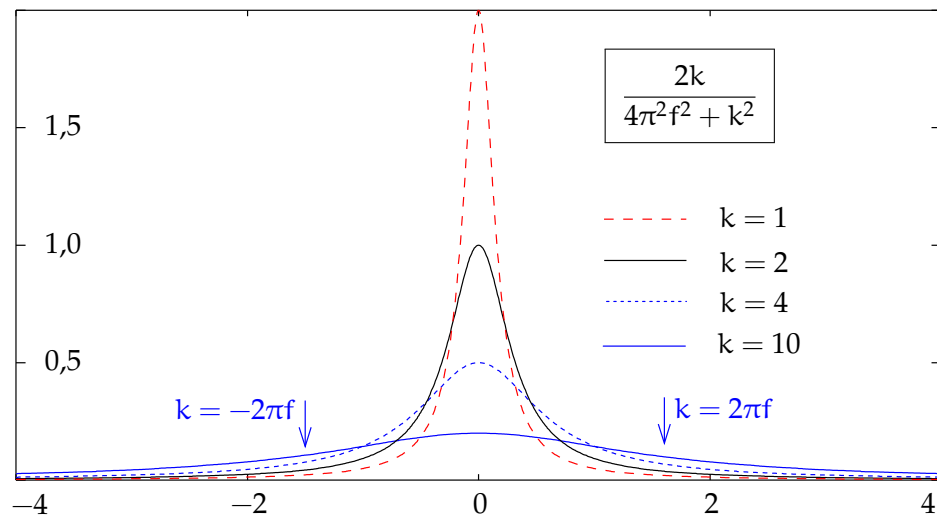
$$e^{2\pi i f t} = \cos(2\pi f t) + i \sin(2\pi f t),$$

ja negatiiviselle taajuudelle $-f$:

$$e^{-2\pi i f t} = \cos(2\pi f t) - i \sin(2\pi f t).$$

²⁰Tämän muotoista kaavaa kutsutaan joskus Cauchyn ja Lorentzin jakaumaksi.





KUVA 2.5. Gaussin ja Markovin prosessin tehon spektraalitiheys (PSD) taajuuden funktiona. Oletettu on $A_x(0) = 1$.

Yhteen- ja vähennyslasku antavat nyt

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2} (e^{-2\pi ift} + e^{2\pi ift}), \quad \sin(2\pi ft) = \frac{1}{2} i (e^{-2\pi ift} - e^{2\pi ift}).$$

Molemmat ovat reaaliarvoisia.

Nähdään siis, että jokaiselle (positiiviselle) taajuudelle f on olemassa kaksi riippumatonta Fourier'n kantafunktiota. Valinta parin $\cos(2\pi ft)$ ja $\sin(2\pi ft)$ ja parin $e^{2\pi ift}$ ja $e^{-2\pi ift}$ välillä on vapaa.



2.8.3 Neliöeksponentiaalinen autokovarianssi

Gaussin ja Markovin prosessin autokovarianssifunktio on yhtälön 2.28 mukaan

$$A_x(\Delta t) = A_x(0) \exp(-k |\Delta t|).$$

Usein vastaan tulee samankaltainen autokovarianssifunktio, joka on muotoa

$$A_x(\Delta t) = A_x(0) \exp(-k^2 \Delta t^2).$$

Sitä kutsutaan nimellä neliöeksponentiaalinen tai Gaussin autokovarianssifunktio.

Tehon spektraalitiheys on asettamalla $t' = 0$ ja siten $\Delta t = t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) \exp(-2\pi ift) dt = 2 \int_0^{+\infty} A_x(t) \cos(2\pi ft) dt = \\ &= 2A_x(0) \int_0^{+\infty} \exp(-k^2 t^2) \cos(2\pi ft) dt = A_x(0) \frac{\sqrt{\pi}}{k} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{k^2}\right), \end{aligned}$$



(Wolfram Functions, $\int \exp bx^2 \cos cx \, dx$). Nähdään, että tehon spektraalitiheysfunktio on samaa neliöeksponentiaalimuotoa kuin autokovarianssifunktio, mutta funktion argumenttina on taajuus f .

Gaussin autokovarianssifunktion pohjaavat prosessit ovat suosittuja koneoppimisen teoriassa. Konepellin alla teoriapohja ei näytä juurikaan eroavan perinteisten menetelmien, kuten pienimmän neliösumman kollokaation (Heiskanen ja Moritz, 1967, luku 7) eli krigingin, teoriapohjasta.



2.8.4 Valkoinen kohina

Valkoisen kohinan PSD voidaan laskea ilmaisulla 2.20:

$$A_n(\Delta t) = Q_n \delta(\Delta t) = Q_n \delta(t - t'),$$

josta valitsemalla $t' = 0$ saadaan

$$\mathcal{A}_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n \delta(t) e^{-2\pi i t f} dt = Q_n e^0 = Q_n$$

käyttäen deltafunktion toisto-ominaisuutta, yhtälö 2.21. Tässä nähdään, miksi prosessia, jolla on Diracin deltatyypinen autokovarianssifunktio, kutsutaan *valkoiseksi* kohinaksi: tehon spektraalitiheys on vakio Q_n koko spektrin läpi ja kaikille taajuuksille f , aivan kuten valkoisen valon tapauksessa — ainakin sähkömagneettisen spektrin optisen ikkunan sisällä.

Olemassa on kuitenkin ongelma: tällaisen prosessin kokonaisteho koko spektrin yli integroituna on

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_n(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} Q_n df = \infty = A_n(0).$$

Tämä ”ultraviolettikatastrofi” osoittaa aidon valkoisen kohinan fyysikaalisen mahdottomuuden sekä Diracin deltafunktion epätodellisuuden. Deltafunktiota pitää käyttää vain turvallisesti paketoituna jonkun integraalin sisällä.

On parempi tutkia Gaussin ja Markovin prosessin 2.32 limiittiä, kun $k \rightarrow \infty$. Lasketaan sen kokonaisteho:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_x(f) df &= 2 \int_0^{\infty} \mathcal{A}_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} A_x(0) \frac{2k}{4\pi^2 f^2 + k^2} df = \\ &= 2A_x(0) \int_0^{\infty} \frac{2k}{k^2 \left(\left(\frac{2\pi f}{k} \right)^2 + 1 \right)} \frac{k}{2\pi} d\left(\frac{2\pi f}{k} \right) = \\ &= 2A_x(0) \frac{1}{\pi} \left[\arctan \frac{2\pi f}{k} \right]_0^{\infty} = 2A_x(0) \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = A_x(0). \end{aligned}$$



Nähdään taas, että kokonaisteho on aina yhtä kuin varianssi, eikä teho riipu arvosta k . Yhtälön 2.32 perusteella

$$\mathcal{A}_x(f) = A_x(0) \frac{2k}{4\pi^2 f^2 + k^2},$$

siis jos $|2\pi f| \ll k$:

$$\mathcal{A}_x(f) \approx \frac{2}{k} A_x(0)$$

ja jos $|2\pi f| \gg k$:

$$\mathcal{A}_x(f) \approx A_x(0) \frac{2k}{4\pi^2 f^2} \approx 0.$$

Nähdään, kuten myös tarkastamalla kuva 2.5, että tällä prosessilla on suunnilleen tasainen spektri alueella $|2\pi f| < k$, ja spektri laskee pisteiden $|2\pi f| \approx k$ tienoilla tasaisesti nolnaan alueilla $|2\pi f| > k$. Rajapisteet $k = \pm 2\pi f$ on merkitty kuvaan: ne ovat käyrän puolikorkeuden kohdat. Lisäksi alue rajapisteiden välillä sisältää puolet kokonaistehosta:

$$\begin{aligned} \int_{-k/2\pi}^{k/2\pi} \mathcal{A}_x(f) df &= 2A_x(0) \frac{1}{\pi} \left[\arctan \frac{2\pi f}{k} \right]_{f=0}^{k/2\pi} = \\ &= A_x(0) \frac{2}{\pi} \arctan 1 = A_x(0) \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} A_x(0). \end{aligned}$$

Mitä suurempi k , sitä matalampi ja leveämpi on spektri, mutta kokonaisteho on aina $A_x(0)$.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on stokastisen prosessin autokovarianssi?
- 2) Mikä on kahden stokastisen prosessin ristikovarianssi?
- 3) Milloin stokastinen prosessi on stationaarinen?
- 4) Mitä on valkoinen kohina?
- 5) Mikä on satunnaiskulku?
- 6) Kuvaile Gaussin ja Markovin prosessi.
- 7) Näytä, että satunnaiskulku ja valkoinen kohina ovat Gaussin ja Markovin prosessin rajatapauksia.
- 8) Mikä on Markovin ketju?
- 9) Mikä on tehon spektraalitiheys ja miten se liittyy autokovarianssi-funktioon?
- 10) Mikä on homoskedastisuus? Mikä on *i.i.d.*?
- 11) Kuinka ajassa korreloitujen havaintojen lineaarinen regressio eroaa korreloimattomien havaintojen vastaavasta?



**Harjoitus 2 – 1: Normaalijakauman normalisointi**

Tarkista, että normaalijakauman, yhtälön 2.2 integraali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx,$$

tuottaa kokonaistodennäköisyyden 100 %.

Vihje Tutki sen tilalla kaksiulotteista stokastista muuttujaa

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix},$$

jolla on yhteinen todennäköisyystiheysjakauma $p(x, y) = p(x)p(y)$, ja integroi napakoordinaateissa. Älä unohda napakoordinaattien Jacobin determinanttia. Nyt ymmärrät, mistä tuon yhtälön 2π on peräisin.

**Harjoitus 2 – 2: Tehollinen otoskoko**

Näytä, että alaosion 2.4.2 aikasarjalle

$$\text{Var}\{\hat{a}\} = \text{Var}'\{\hat{a}\} \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$



Kalmanin suodin

3

Kalmanin suodin on lineaarinen ja ennustava suodin. Kuten kahvisuodin, joka suodattaa kahvia kahvinporoista, Kalmanin suodin suodattaa signaalia (niin sanottu *state vector*, tilavektori) havainto- ja kehitysprosessien kohinasta. Kalmanin suodin on optimaalinen estimaattori pienemmän neliösumman merkityksessä.

Kalmanin suotimen keksijät olivat Rudolf Kalman¹ ja Richard Bucy² vuosina 1960–1961 (Kalman, 1960; Kalman ja Bucy, 1961). Keksintöä käytettiin laajasti avaruushjelmassa ja ohjusten ohjausjärjestelmien yhteydessä.

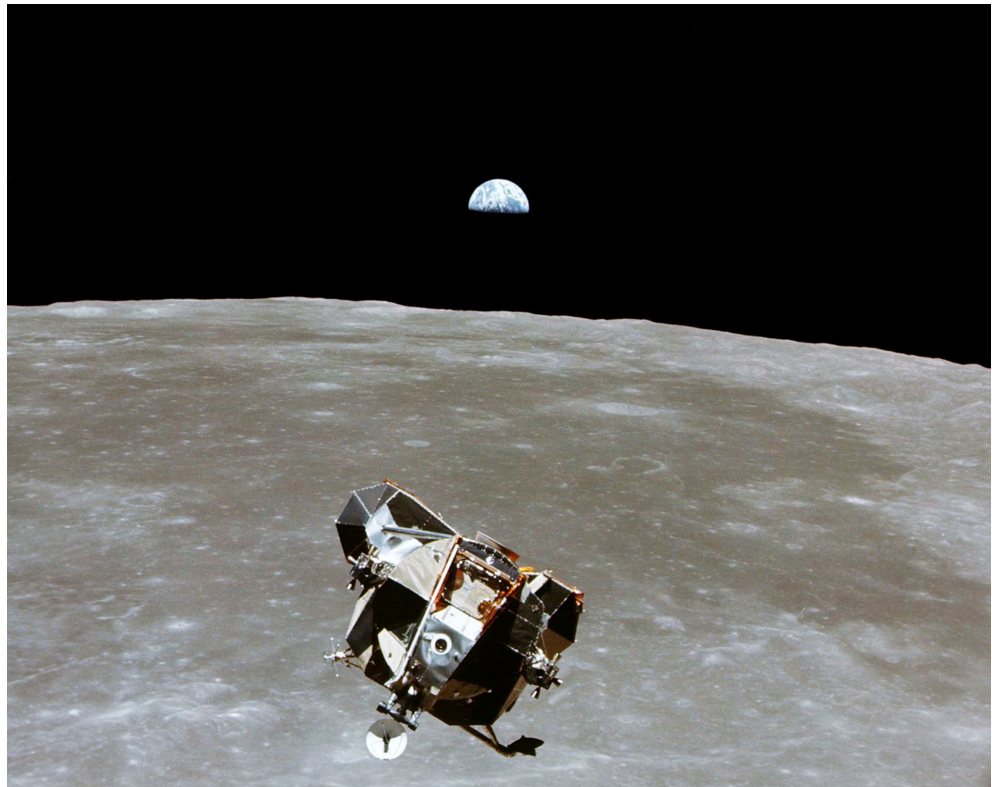
Eräs Kalmanin suotimen tärkeistä sovelluksesta oli *rendezvous kiertoradalla*: siinä kaksi avaruusalusta tapaa ja vaihtaa miehistöä tai tavaraa tilanteessa, jossa alukset joko liikkuvat lähellä toisiaan pienellä suhteellisella nopeudella tai ovat jopa telakoituneina toisiinsa. Ongelma, joka on nykyisin käytännön rutiinia Kansainvälisen avaruusaseman huoltolentojen yhteydessä, katsottiin hyvin haastavaksi aikana, jolloin Apillp-kuuohjelmaa vasta ehdotettiin. Tekniikaksi hyväksyttiin *rendezvous* Kuun kiertoradalla (LOR, *lunar orbit rendezvous*), ja se auttoi suuresti pitämään projektin aikataulussa (Dickinson, 2014).

Kalmanin suodin on myös yleispätevä estimaattori, joka on käytetty paitsi navigoinnissa myös muun muassa taloustieteessä ja säätieteessä.

Kalmanin suodin sai alkunsa säätötekniikasta ja signaalinkäsittelystä. Sillä on kuitenkin monenlaisia yhteyksiä geotieteiden pienimmän neliösumman menetelmiin, kuten tasoitukseen, kollokaatioon ja krigingiin. Sanastolliset erot eivät saa hämärtää tätä.

¹Rudolf Emil Kálmán (1930–2016) oli unkarilaissyntyinen amerikkalainen sähköinsinööri, matemaatikko ja keksijä.

²Richard Snowden Bucy (s. 1935) on amerikkalainen matemaatikko.



KUVA 3.1. *Rendezvous* Kuun kiertoradalla: kaksi astronauttia ja pussillinen kiviä kotimatalla. Huomaa, että sekä emoalus — *Command and Service Module, CSM* — että laskeutumisalus, tässä kuvattuna emoaluksesta käsin, oli varustettu inertianavigointijärjestelmällä. Se oli pelastus, kun huoltomoduuli eli *Service Module* meni epäkuntoon räjähdysten takia Apollo 13 -lennon aikana.



Napsauta ääntämisohjetta varten (e-kirja).

Taustalukemiseksi suositellaan [Strang ja Borre \(1997\)](#), sivut 543–583. Hyvä linkki on [Welch ja Bishop](#) ja hyvä diasarja [Welch ja Bishop \(2001\)](#).

Kalmanin suodin koostuu kahdesta osasta:

- 1) *Dynaaminen malli* kuvaa, miten *tilavektori* kehittyy ajassa.
- 2) *Havaintomalli* kuvaa, miten tehdään havaintoja, jotka sisältävät tietoja havaintohetken tilavektorista.

Molemmat mallit sisältävät stokastisuutta. Dynaaminen malli kuvaa myös satunnaisia vaikutuksia järjestelmän ajalliseen kehitykseen, esimerkiksi satelliittiradan häiriöitä. Havaintomalli puolestaan kuvaa myös havaintojen epävarmuuden vaikutusta.

Kalmanin suodin on erikoinen siinä mielessä, että tilavektori kulkee eteenpäin ajassa askel kerrallaan. Havaintoja käytetään tilavektorin

estimaatin korjaamiseksi silloin, kun on tehty havaintoja. Tästä syystä Kalmanin suodin ei vaadi suurta laskentatehoa eikä käsittele suuria matriiseja. Se voidaanakin toteuttaa vaikkapa kulkuneuvossa tosiajassa.



3.1 Tilavektori

Tilavektori (engl. *state vector*) on muodollinen vektori ja abstraktin vektoriavaruuden alkio, joka kuvaa dynaamisen järjestelmän kokonaista tilaa joko tietyllä ajan hetkellä eli *epookilla* t tai ajan funktiona eli stokastisena prosessina.

Esitetään konkreettinen esimerkki. Vapaasti avaruudessa liikkuvalla hiukkasella on kolme paikkakoordinaattia ja kolme nopeuskomponenttia. Olkoon avaruuden ortonormaali kanta $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Silloin kirjoitetaan hiukkasen paikkavektori

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

ja nopeusvektori

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{x}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}.$$

Avaruuden vektori identifioidaan usein sen sovitulla ortonormaalilla kannalla $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ muodostaman kolmen komponentin muodollisen vektorin kanssa:

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff \mathbf{x}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

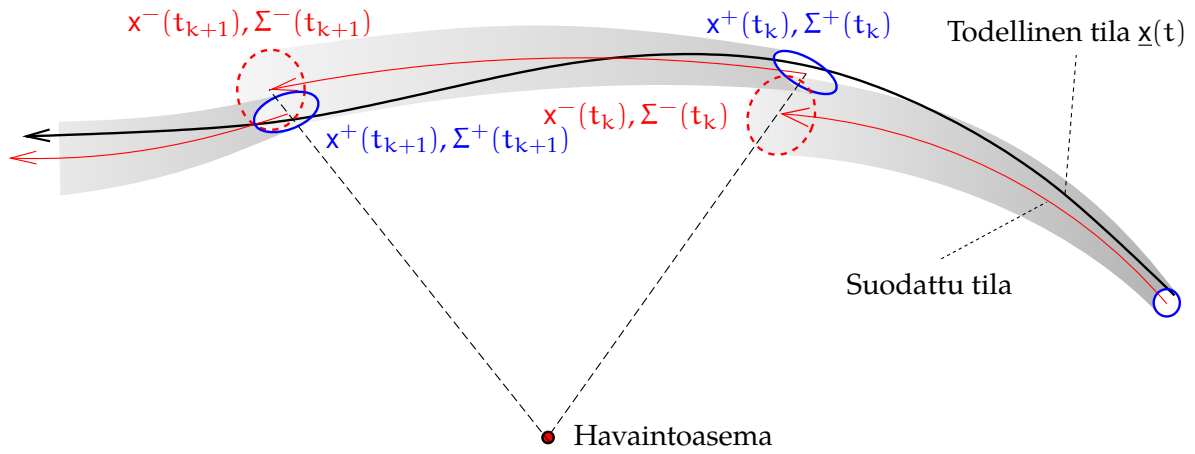
vaikka \mathbf{x} ja \mathbf{x}_β ovat käsitteellisesti eri asioita. Usein β jätetään puolihuo- limattomasti pois, jos merkitys on selvä eli

$$\mathbf{x}_\beta \sim \mathbf{x}.$$

Nyt hiukkasen *tilavektoriksi* muodostuu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$





(a)

Kalmanin suodin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\underline{x}(t) &= F(\underline{x}, t) + \underline{n}(t) \stackrel{\text{lin}}{\approx} F(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{n}(t), \\ \frac{d}{dt}\underline{x}^-(t) &= F(\underline{x}^-, t) \stackrel{\text{lin}}{\approx} F(t) \cdot \underline{x}^-(t), \\ \frac{d}{dt}\Sigma^-(t) &= F(t) \Sigma^-(t) + \Sigma^-(t) F^T(t) + Q_n(t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{x}(t_{k+1}) &= \Phi_k^{k+1} \underline{x}(t_k) + \underline{w}_k^{k+1}, & \underline{w}_k^{k+1} &= \int_k^{k+1} \Phi_t^{k+1} \underline{n}(t) dt, \\ \underline{x}^-(t_{k+1}) &= \Phi_k^{k+1} \underline{x}^-(t_k), \\ \Sigma^-(t_{k+1}) &= (\Phi_k^{k+1}) \Sigma^-(t_k) (\Phi_k^{k+1})^T + \Theta_k^{k+1}, & \Theta_k^{k+1} &= \int_k^{k+1} (\Phi_t^{k+1}) Q_n(t) (\Phi_t^{k+1})^T dt.\end{aligned}$$

(b)

Dynaaminen malli

$$\begin{aligned}\underline{\ell}_k &= H(\underline{x}^-(t_k)) + \underline{m}_k \stackrel{\text{lin}}{\approx} H_k \cdot \underline{x}^-(t_k) + \underline{m}_k, & \text{Var}\{\underline{m}_k\} &= R_k \\ \underline{x}^+(t_k) &= \underline{x}^-(t_k) - K_k \cdot (H(\underline{x}^-(t_k)) - \underline{\ell}_k) \stackrel{\text{lin}}{\approx} \underline{x}^-(t_k) - K_k \cdot (H_k \cdot \underline{x}^-(t_k) - \underline{\ell}_k), \\ \Sigma^+(t_k) &= (I - K_k H_k) \Sigma^-(t_k), & K_k &= \Sigma^-(t_k) H_k^T (H_k \Sigma^-(t_k) H_k^T + R_k)^{-1}.\end{aligned}$$

(c)

Havaintomalli ja päivitysaskel

KUVA 3.2. Kalmanin suodin, yhteenveto. Huomaa käytetty konventio: integrointirajoissa ja tilansiirroissa lyhennetään ilmaisu t_k indeksiksi k , t_{k+1} indeksiksi $k+1$ ja niin edelleen.



jossa paikka- ja nopeusvektorit ovat

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\beta = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}.$$

Tässä tapauksessa tilavektori koostuu siis kuudesta alkioista, eli sillä on kuusi *vapausastetta*.

Koko tilavektori, jokainen tilavektorin alkio ja molemmat osavektorit ovat kaikki ajan funktioita:

$$x = x(t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t), \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t), \quad \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}(t), \quad \dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}(t).$$

Jos hiukkanen ei ole pistemäinen vaan laajempi kappale, myös sen asentokulmat eli *Eulerin kulmat* sisällytetään tilavektoriin. Silloin alkioita on jo yhdeksän. Usean hiukkasen järjestelmässä jokainen hiukkanen tuo omat alkionsa, kolme paikan ja kolme nopeuden komponenttia, tilavektoriin.

Tilavektori voi sisältää myös alkioita, jotka mallintavat mekaanisen laitteen, kuten inertiamittausyksikön, käyttäytymisen.



3.2 Dynaaminen malli

Dynaaminen malli kuvaa tilavektorin käyttäytymistä ajassa. Tilavektori on edellisen osion määritelmän mukaan vektoriarvoinen stokastinen prosessi eli ajan t funktio.

Tässä esitetty dynaamisen mallin perusmuoto on tilavektorin *tavallinen differentiaaliyhtälö* ajassa. Olemassa on myös vaihtoehtoinen muoto, jossa tilavektorin muutos ajassa kuvataan diskreetillä tavalla siirtona epookista t_k epookkiin t_{k+1} . Tämä diskreetti muoto esitetään osiossa 3.4.

Ensin esitetään kuitenkin lineaarinen tapaus. Sen jälkeen esitetään epälineaarinen tapaus ja suoritetaan linearisointi. Tulos on niin sanottu *laajennettu Kalmanin suodin*.



3.2.1 Lineaarinen tapaus

Lineaarisessa tapauksessa dynaaminen malli on

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (3.2)$$



jossa \underline{x} on tilavektori ja \underline{n} on *dynaaminen kohina*, joka edustaa todellisen liikkeen satunnaista vaihtelevuutta. Alleviivaus merkitsee, että suure on stokastinen. Matriisi F — joka voi olla ajan funktio — on mallin kerroinmatriisi.

Tilavektorilla on niin monta alkioita kuin tarvitaan järjestelmän hetkellisen tilan täydelliseksi kuvaamiseksi. Dynaamisella kohinalla on saman verran alkioita. Kerroinmatriisi on neliömatriisi, jossa on saman verran sekä rivejä että sarakkeita.

Dynaamiselle kohinalle \underline{n} on määriteltävä realistiset *tilastolliset ominaisuudet*: usein oletetaan, että se on valkoinen kohina, jonka autokovarianssi on (yhtälö 2.20):

$$A_n(\Delta t) = Q_n \delta(\Delta t).$$

Tämä aiheuttaa sen, että tilavektorin \underline{x} satunnaisuus käyttäytyy tavalla, joka muistuttaa satunnaiskulkua, alaosio 2.6.3. Jos tilavektori on varsinainen vektori, jolla on enemmän kuin yksi alkio, myös A_n ja Q_n ovat samankokoisia neliömatriiseja.



3.2.2 Linearisointi

Yleisempi ei-lineaarinen tapaus, jota kirjallisuudessa kutsutaan nimellä *laajennettu Kalmanin suodin*, on

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = F(\underline{x}, t) + \underline{n}(t), \quad (3.3)$$

jossa $F(\underline{x}, t)$ on vektorifunktio. Lineaarinen tapaus seuraa tästä helposti: valitse tilavektorille *likiarvo* eli *vertausarvo* $\underline{x}^{(0)}(t)$, ajan funktio. Tältä likiarvolta vaaditaan yhteensopivuutta dynaamisen mallin kanssa:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}^{(0)}(t) = F(\underline{x}^{(0)}, t). \quad (3.4)$$

Nyt linearisoidaan vähentämällä yhtälö 3.4 yhtälöstä 3.3 ja kehittämällä tulos Taylorin sarjaksi:

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} - \underline{x}^{(0)}) = F(\underline{x}, t) + \underline{n}(t) - F(\underline{x}^{(0)}, t) \approx F(t) (\underline{x} - \underline{x}^{(0)}) + \underline{n}(t),$$

mikä määritelmällä $\Delta \underline{x} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x} - \underline{x}^{(0)}$ on jo muotoa 3.2:

$$\frac{d}{dt}\Delta \underline{x}(t) = F(t) \Delta \underline{x}(t) + \underline{n}(t).$$

Tästä voi pudottaa deltat taas pois, ellei ole väärinkäsityksen vaaraa.



Funktion $F(\cdot)$ yllä käytetyn Jacobin³ matriisin F alkioit ovat

$$F_{ij}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\overbrace{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n}^{\mathbf{x}}, t) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

jossa x_j ovat vektorin \mathbf{x} komponentit, n kappaletta. Esimerkiksi yhtälön 3.1 tilavektorissa ne ovat

$$\mathbf{x} = \left[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \mid x_4 \quad x_5 \quad x_6 \right]^T = \left[x \quad y \quad z \mid \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \right]^T.$$

Yhtälön 3.5 derivaatat evaluoidaan vektorin

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left[x^{(0)} \quad y^{(0)} \quad z^{(0)} \mid \dot{x}^{(0)} \quad \dot{y}^{(0)} \quad \dot{z}^{(0)} \right]^T$$

antamien likiarvojen kohdalla.

Funktio $F(\mathbf{x}, t)$ on vektori, jolla on n komponenttia, $F_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1 \dots, n$.



3.2.3 Tilan ennustaminen

Tilan ennustaminen tapahtuu integroimalla differentiaaliyhtälö, joka on dynaaminen malli. Yleisessä tapauksessa malli on yhtälö 3.3:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = F(\mathbf{x}, t) + \mathbf{n}.$$

Tilan kehityksen laskennassa ei integroida todellista tilavektoria $\mathbf{x}(t)$, koska sitä ei tunneta. Sen sijaan voidaan integroida tilan estimaattori $\mathbf{x}^-(t)$. Kohinatermi \mathbf{n} jää pois todellisen tiedon puuttuessa: sen paras estimaattori on nolla.

Asetetaan sama dynaaminen laki estimaattorille:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^-(t) = F(\mathbf{x}^-, t),$$

ja integrointi lähtee jostakin järkevästä alkutilasta $\mathbf{x}^-(t_0)$. Jos tilan estimaattori on sopivan lähellä likitilaa $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, yhtälö 3.4, voidaan käyttää samaa linearisointia kuin todellisen tilan tapauksessa, ja tuloksena on linearisoitu yhtälö

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^- - \mathbf{x}^{(0)}) = F(t)(\mathbf{x}^- - \mathbf{x}^{(0)}) \implies \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x}^-(t) = F(t)\Delta\mathbf{x}^-(t).$$

Tästä deltat voidaan taas pudottaa pois:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^-(t) = F(t)\mathbf{x}^-(t). \quad (3.6)$$

³Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) oli nerokas juutalaissaksalainen matemaatikko. Hän menehtyi isorokkoon vain 46-vuotiaana.

Linearisessa tapauksessa on todellisen tilan yhtälö 3.2:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = F(t)\underline{x}(t) + \underline{n}.$$

Estimaattorin yhtälö 3.6 on sama yhtälö, mutta ilman kohinaa.

Käytetty merkintätapa on:

\underline{x}^- *a priori* tilan estimaattori eli estimaattori ennen (myöhemmin käsiteltävää) päivitysaskelta

\underline{x}^+ *a posteriori* tilan estimaattori, päivitysaskkeen jälkeen.

Kirjallisuudesta löytyvät myös muut merkintätavat, kuten $\hat{\mathbf{x}}^{k-1}$ ja $\hat{\mathbf{x}}^k$, jossa k on päivityksen numero. "Hattu" on estimaattorin merkki.



3.3 Esimerkki: satelliitin rataliike

Esimerkki on avaruusaluksen liike Maan gravitaatio- eli vetovoimakentässä. Kenttä approksimoidaan pistemassan GM_{\oplus} kentällä:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{bmatrix} = -\frac{GM_{\oplus}}{(\underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n}_x \\ \underline{n}_y \\ \underline{n}_z \end{bmatrix},$$

jossa $\underline{n}_x, \underline{n}_y, \underline{n}_z$ kuvaavat häiriöitä, kuten ilmakehän vastuksen satunnaisesti vaihtelevaa vaikutusta tai Maan vetovoimakentän epäsäännöllisyyksiä, joiden takia aluksen rataliikettä on mahdoton ennustaa tarkasti.

Tämä on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä. Tilavektoria pidennetään lisäämällä siihen *nopeuden komponentit*, jolloin saadaan ensimmäisen kertaluvun yhtälöryhmä:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\dot{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}(\underline{x}, t) \\ -\frac{GM_{\oplus}}{(\underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n}(t) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Tämä yhtälöryhmä on epälineaarinen. Linearisointi antaa



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{y} \\ \Delta \underline{z} \\ \Delta \dot{\underline{x}} \\ \Delta \dot{\underline{y}} \\ \Delta \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{GM_{\oplus}}{r^5} \begin{pmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3yx & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3zx & 3zy & 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(0)} \begin{bmatrix} \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{y} \\ \Delta \underline{z} \\ \Delta \dot{\underline{x}} \\ \Delta \dot{\underline{y}} \\ \Delta \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{n}_x \\ \underline{n}_y \\ \underline{n}_z \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

jossa $r \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ on etäisyys Maan keskipisteestä.

Muut oletukset ovat:

- Olemassa on sopiva *likirata* eli *vertausrata*, toisin sanoen joukko likiarvoja, jotka muodostavat likimääräisen tilavektorin

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x^{(0)}(t) & y^{(0)}(t) & z^{(0)}(t) & \dot{x}^{(0)}(t) & \dot{y}^{(0)}(t) & \dot{z}^{(0)}(t) \end{array} \right]^T,$$

jonka suhteen deltasuureet yhtälössä 3.7 on laskettu:

$$\Delta \underline{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}(t).$$

Nämä ovat kaikki ajan funktioita.

- Kerroinmatriisin $F(t)$ alkiot lasketaan niillä likiarvoilla.

Jokainen likimääräisen tilavektorin alkio on ajan funktio, kuten on koko vektori. Vektori on epälineaarisen dynaamisen mallin, yhtälön 3.4, tarkka ratkaisu.



3.3.1 Gravitaatiogradienttitensori

Yllä olevan dynaamisen yhtälön 3.7 ositettu versio on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{M}^{(0)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

jossa I on 3×3 -kokoinen yksikkömatriisi eli Kroneckerin⁴ tensori ja \mathcal{M} on tensori nimeltä gravitaatiogradienttitensori. Tensorin komponentti-

⁴Leopold Kronecker (1823–1891) oli saksalainen matemaatikko, joka edisti lukuteoriaa ja algebraa.

matriisi koordinaatiston (x, y, z) kannalla $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\beta &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \left(-\frac{GM_\oplus}{r^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \frac{GM_\oplus}{r} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \frac{GM_\oplus}{r} = \\ &= \frac{GM_\oplus}{r^5} \begin{bmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3yx & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3zx & 3zy & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Tässä oletetaan keskinen pallosymmetrinen vetovoimakenttä.

Tensorin komponenttimatriisi koostuu gravitaatiovektorin komponenttien

$$-\frac{GM_\oplus}{r^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

osittaisderivaatoista paikan suhteen. Muista, että gravitaatiovektori on itsekin *geopotentialin gradientti*. Tensori sisältää geopotentialin

$$\frac{GM_\oplus}{r}$$

kaikki kaksoisosittaisderivaatat paikan suhteen.

Tensori \mathcal{M} kuvaa, miten pieni satelliitin paikan häiriö $\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix}^T$ kääntyy kiihtyvyyshäiriöksi $\Delta \mathbf{a}$:

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{y} \\ \Delta \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{v} = \mathcal{M} \Delta \mathbf{x} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}.$$



3.3.2 Likiarvojen valinta

Tärkeintä likiarvojen valinnassa on sen lisäksi, että ne ovat sopivan lähellä oikeita arvoja, että ne ovat *fysikaalisesti yhteensopivia*. Toisin sanoen



ne esittävät aidosti mahdollisen rataliikkeen oletetun vetovoimakentän sisällä. Tästä syystä lienee nimitys *vertausarvot* sopivampi.

Jos gravitaatiokenttä on keskeiskenttä, *Keplerin rataliike* vetovoiman keskuksen GM_{\oplus} ympäri antaa sopivat likiarvot, katso osio 6.1.

Vieläkin yksinkertaisempi likiarvojen lähde on *tasainen ympyräliike*. Tämä on sopiva valinta, jos radan eksentrisyys on lähellä nollaa.

Jos saatavissa on vetovoimakentän malli, joka on monimutkaisempi kuin keskeiskenttä, likiarvot tulee integroida ajassa tällä tarkemmalla mallilla. Yllä esitetty linearisoitu dynaaminen malli, yhtälö 3.7, kelpaa edelleen erosuureiden $\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{v}$ integroimiseksi, jos ne vain pysyvät *numeerisesti pieninä*. Tämä on linearisoinnin eräs etu.



3.4 Diskreetti dynaaminen malli

Määritelmä:

Tilavektorin varianssi on tilavektorin estimaattorin odotettu neliöllinen erotus tilavektorin oikeasta arvosta, seuraavasti:

$$\Sigma^-(t) = \text{Var}\{\mathbf{x}^-(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left\{(\mathbf{x}^-(t) - \underline{\mathbf{x}}(t))(\mathbf{x}^-(t) - \underline{\mathbf{x}}(t))^T\right\}. \quad (3.10)$$

Tietenkin on huomattava, että tilavektori $\mathbf{x}(t)$ on stokastinen prosessi, *johon emme pääse käsiksi*. Voimme vain tuntea sen estimaattorin $\mathbf{x}^-(t)$.



3.4.1 Tilansiirtomatriisi

Oletetaan, että matriisi F on vakio. Pienille aika-askelille $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ pätee likimäärin

$$\mathbf{x}^-(t_{k+1}) \approx \mathbf{x}^-(t_k) + F \Delta t \cdot \mathbf{x}^-(t_k) = (I + F \Delta t) \mathbf{x}^-(t_k).$$

Näkyvät, että epookin t_{k+1} tilavektorin $\mathbf{x}^-(t_{k+1})$ alkioit ovat edellisen epookin t_k tilavektorin $\mathbf{x}^-(t_k)$ alkioiden *lineaariyhdistelmiä*. Jos vieläkin pienemmillä aika-askelilla δt pätee $\Delta t = n \delta t$, seuraa yllä olevaa yhtälöä toistuvasti soveltamalla:

$$\mathbf{x}^-(t_{k+1}) = (I + F \delta t)^n \mathbf{x}^-(t_k).$$

Matriisia

$$\Phi_k^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (I + F \delta t)^n$$



kutsutaan *tilansiirtomatriisiksi* epookkien t_k ja t_{k+1} välillä, ja kirjoitetaan

$$\mathbf{x}^-(t_{k+1}) = \Phi_k^{k+1} \mathbf{x}^-(t_k). \quad (3.11)$$

Sijoittamalla $\delta t = \Delta t/n$ saadaan

$$\Phi_k^{k+1} = \left(I + \frac{F \Delta t}{n} \right)^n.$$

Tavallisille reaalityyppisille on olemassa klassinen yhtälö

$$\begin{aligned} e^x = \exp(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v} \right)^{vx} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{v} \right)^v \right)^x, \end{aligned}$$

jossa näkyy luvun e määritelmä:

$$e = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v.$$

Siksi kirjoitetaan yleistämällä funktiot \exp ja \ln neliön muotoisille matriiseille:

$$\begin{aligned} \Phi_k^{k+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\ln \left(I + \frac{F \Delta t}{n} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(n \ln \left(I + \frac{F \Delta t}{n} \right) \right) = \\ &= \exp \left(n \frac{F \Delta t}{n} \right) = \exp(F \Delta t) = e^{F \Delta t}. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Tämä tulkitaan Taylorin sarjakehitelmäksi:

$$\Phi_k^{k+1} = e^{F \Delta t} = I + F \Delta t + \frac{1}{2} F^2 \Delta t^2 + \frac{1}{6} F^3 \Delta t^3 + \dots$$

Havaitaan, että tilansiirtomatriisille pätee *transitiivinen ominaisuus*:

$$\Phi_k^{k+2} = \Phi_{k+1}^{k+2} \cdot \Phi_k^{k+1},$$

toisin sanoen siirtymiseksi tilasta $\mathbf{x}(t_k)$ tilaan $\mathbf{x}(t_{k+2})$ voidaan siirtyä ensin tilasta t_k tilaan t_{k+1} ja sen jälkeen tilasta t_{k+1} tilaan t_{k+2} .



3.4.2 Esimerkki: satelliitin rataliike

Differentiaaliyhtälöä 3.8 voidaan muuntaa, pienille arvoille Δt , seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t_{k+1}) \\ \Delta \mathbf{v}(t_{k+1}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t_k) \\ \Delta \mathbf{v}(t_k) \end{bmatrix} &\approx \Delta t \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{M}_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t_k) \\ \Delta \mathbf{v}(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t_{k+1}) \\ \Delta \mathbf{v}(t_{k+1}) \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} I & I \Delta t \\ \mathcal{M}_k \Delta t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t_k) \\ \Delta \mathbf{v}(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$



määritelmillä $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} t_{k+1} - t_k$ ja $\mathcal{M}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}^{(0)}(t_k)$.

Nähdään, että tilansiirtomatriisi on

$$\Phi_k^{k+1} = \begin{bmatrix} I & I \Delta t \\ \mathcal{M}_k \Delta t & I \end{bmatrix}.$$

Samalla tavalla seuraavan tilansiirron matriisi on

$$\Phi_{k+1}^{k+2} = \begin{bmatrix} I & I \Delta t \\ \mathcal{M}_{k+1} \Delta t & I \end{bmatrix}.$$

Niiden ketjuttaminen eli kertominen antaa

$$\begin{aligned} \Phi_k^{k+2} &= \Phi_{k+1}^{k+2} \cdot \Phi_k^{k+1} = \begin{bmatrix} I & I \Delta t \\ \mathcal{M}_{k+1} \Delta t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \Delta t \\ \mathcal{M}_k \Delta t & I \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} I + \mathcal{O}(\Delta t^2) & (I + I) \Delta t \\ (\mathcal{M}_{k+1} + \mathcal{M}_k) \Delta t & I + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tämän toistaminen monille pienille aika-askelille Δt antaa uskoa, että seuraava integraaliyhtälö pätee yleisesti:

$$\Phi_0^t = \begin{bmatrix} I & I \cdot (t - t_0) \\ \int_0^t \mathcal{M}(\tau) d\tau & I \end{bmatrix}.$$



3.4.3 Tilan ja tilavarianssin kehitys

Tarkastellaan suureiden $x^-(t)$ ja $\underline{x}(t)$ kehitystä ajassa diskreetin mallin mukaan.

Diskreetti ajansiirtoyhtälö 3.11 tilaestimaattorille on

$$x^-(t_{k+1}) = \Phi_k^{k+1} x^-(t_k),$$

jossa Φ_k^{k+1} on tilansiirtomatriisi. Ilman kohinaa $\underline{n}(t)$ pätee myös

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \Phi_k^{k+1} \underline{x}(t_k)$$

ja vähennys antaa

$$(x^-(t_{k+1}) - \underline{x}(t_{k+1})) = \Phi_k^{k+1} (x^-(t_k) - \underline{x}(t_k)),$$

jonka jälkeen varianssien kasautumislain soveltaminen antaa (yhtälö 3.10):

$$\Sigma^-(t_{k+1}) = (\Phi_k^{k+1}) \Sigma^-(t_k) (\Phi_k^{k+1})^T.$$





3.4.4 Tilan kehitys kohinan läsnä ollessa

Dynaamisen kohinan läsnä ollessa pätevät seuraavat diskreetit dynaamiset yhtälöt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^-(t_{k+1}) &= \Phi_k^{k+1} \mathbf{x}^-(t_k) \\ \mathbf{x}(t_{k+1}) &= \Phi_k^{k+1} \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{w}_k^{k+1} \\ \Sigma^-(t_{k+1}) &= (\Phi_k^{k+1}) \Sigma^-(t_k) (\Phi_k^{k+1})^T + \Theta_k^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nämä yhtälöt esitettiin jo kuvassa 3.2b. Näytetään alaosioissa 3.5.2 ja 3.5.3 yhteys jatkuviin vastineisiin eli differentiaaliyhtälöihin, jotka näkyvät samassa kuvassa.

Yhtälössä 3.13 kuvan 3.2b mukaan:

$$\mathbf{w}_k^{k+1} = \mathbf{w}_{t_k}^{t_{k+1}} = \int_k^{k+1} \Phi_t^{k+1} \mathbf{n}(t) dt, \quad (3.14)$$

ja funktion \mathbf{w} autokovarianssi on

$$\Theta_k^{k+1} = \Theta_{t_k}^{t_{k+1}} = A_{w,k}(t_{k+1}, t_k) = \int_k^{k+1} (\Phi_t^{k+1}) Q_n(t) (\Phi_t^{k+1})^T dt. \quad (3.15)$$

Yhtälöiden 3.14 ja 3.15 tulkinta on seuraava. Välin (t_k, t_{k+1}) jokaisen kohinan alkiota $\mathbf{n}(t) dt$ ja jokaisen alkion varianssimatriisia $Q_n(t) dt$ siirretään eteenpäin ajassa hetkestä t hetkeen t_{k+1} kertomalla tilansiirtomatriisilla Φ_t^{k+1} .

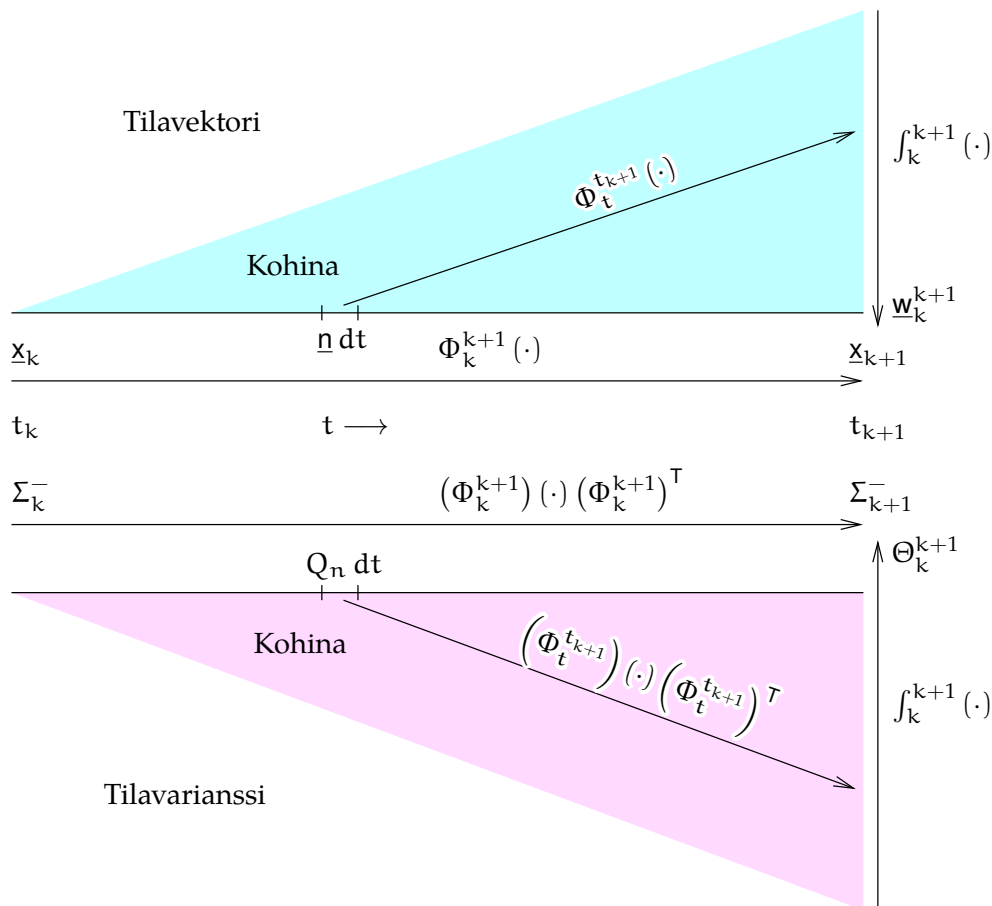
Varianssimatriisi sekä kerrotaan tilansiirtomatriisin kanssa vasemmalta että sen transpoosin kanssa oikealta, kuten on tapana tehdä kaasautumislain perusteella. Sen jälkeen suoritetaan integrointi ”eteenpäin siirrettyjen” alkioden yli.

Jos aikaväli $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ on lyhyt ja Φ -matriisit siis lähellä yksikkömatriisiä,

$$\mathbf{w}_k^{k+1} \approx \int_k^{k+1} \mathbf{n}(t) dt, \quad \Theta_k^{k+1} \approx \int_k^{k+1} Q_n(t) dt.$$

Oletus on, että dynaaminen kohina $\mathbf{n}(t)$ on valkoinen. Tässä tapauksessa $\mathbf{w}_k(t)$ on *satunnaiskulku* eli valkoisen kohinan integraali, johon tutustuimme jo aiemmin. Kehitysprosessin kuvio on kuvassa 3.3.





KUVA 3.3. Tilavektorin kehitys ja tilavarianssin ennustaminen kohinan läsnä ollessa.



3.5 Tilan varianssin differentiaaliyhtälö



3.5.1 Tilansiirtomatriisin differentiaaliyhtälö

Voimme myös johtaa differentiaaliyhtälöitä, jotka kuvaavat tilavarianssimatriisin ja tilansiirtomatriisin kehitystä ajassa. Oletetaan, että matriisi $F(t)$ on ajan funktio.

Differentioi yhtälö 3.11:

$$\dot{x}^-(t) = \Phi_0^t x^-(t_0) \implies \frac{d}{dt} x^-(t) = \left(\frac{d}{dt} \Phi_0^t \right) x^-(t_0).$$

Sijoita yhtälöön 3.6:

$$\frac{d}{dt} x^-(t) = F(t) x^-(t) = F(t) \Phi_0^t x^-(t_0),$$

tuloksena

$$\left(\frac{d}{dt} \Phi_0^t \right) x^-(t_0) = F(t) \Phi_0^t x^-(t_0) \implies \frac{d}{dt} \Phi_0^t = F(t) \Phi_0^t. \quad (3.16)$$



Alkuehdon $\Phi_0^0 = I$ kanssa voimme integroimalla laskea matriisin Φ_0^t .

Olemassa ei ole suljettua ratkaisua, paitsi jos F on vakio tai jos

$$F(t') F(t) = F(t) F(t') \quad (3.17)$$

mielivaltaisille t, t' ([Wikipedia](#), [Magnus expansion](#)). Silloin yhtälön 3.12 tapaan

$$\Phi_0^t = \exp\left(\int_0^t F(\tau) d\tau\right), \quad (3.18)$$

mikä on tulkittava Taylorin sarjakehitelmäksi:

$$\Phi_0^t = I + \int_0^t F(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \left(\int_0^t F(\tau) d\tau\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\int_0^t F(\tau) d\tau\right)^3 + \dots$$

Tämä on yhtälön 3.12 yleistys, jossa matriisi $F(t)$ vaihtelee ajassa.

Järjestelmä, jossa eksponenttiyhtälö 3.18 ei toimi, on alaosion 3.4.2 satelliittiesimerkki:

$$\begin{aligned} F(t') F(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{M}^{(0)}(t') & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{M}^{(0)}(t) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{(0)}(t) & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{(0)}(t') \end{bmatrix} \neq F(t) F(t'). \end{aligned}$$



3.5.2 Tilan varianssin differentiaaliyhtälö

Tilan varianssimatriisin Σ differentiaaliyhtälön johtamiseksi lähdetään yhtälöstä 3.13:

$$\Sigma^-(t) = \Phi_0^t \Sigma^-(t_0) (\Phi_0^t)^T + \Theta_0^t.$$

Differentioidaan ja käytetään yhtälöä 3.16:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma^-(t) &= \left(\frac{d}{dt} \Phi_0^t\right) \Sigma^-(t_0) (\Phi_0^t)^T + \Phi_0^t \Sigma^-(t_0) \left(\frac{d}{dt} \Phi_0^t\right)^T + \frac{d}{dt} \Theta_0^t = \\ &= F(t) \Phi_0^t \Sigma^-(t_0) (\Phi_0^t)^T + \Phi_0^t \Sigma^-(t_0) (\Phi_0^t)^T F^T(t) + \frac{d}{dt} \Theta_0^t. \end{aligned}$$

Kun annetaan $t_0 \rightarrow t$, seuraa $\Phi_0^t \rightarrow I$ ja

$$\frac{d}{dt} \Sigma^-(t) = F(t) \Sigma^-(t) + \Sigma^-(t) F^T(t) + \frac{d}{dt} \Theta_0^t.$$

Integraalin 3.15 kanssa saadaan samassa limiitissä $t_0 \rightarrow t, \tau \rightarrow t$, ja siis $\Phi_\tau^t \rightarrow I$, tuloksen

$$\frac{d}{dt} \Theta_0^t = \frac{d}{dt} \int_0^t (\Phi_\tau^t) Q_n(\tau) (\Phi_\tau^t)^T d\tau \approx \frac{d}{dt} \int_0^t Q_n(\tau) d\tau = Q_n(t),$$

ja siis

$$\frac{d}{dt} \Sigma^-(t) = F(t) \Sigma^-(t) + \Sigma^-(t) F^T(t) + Q_n(t). \quad (3.19)$$



**3.5.3 Tilakohinan differentiaaliyhtälöt**

Lähdetään liikkeelle yhtälöstä 3.13, jossa kohina on mukana,

$$\underline{x}(t) = \Phi_0^t \underline{x}(t_0) + \underline{w}_0^t. \quad (3.20)$$

Jaetaan aikaväli $[t_0, t]$ n osaväliin, joiden koko on δt , eli

$$t_k = t_0 + k \delta t, k = 1, \dots, n$$

ja $t = t_n$. Kehitetään

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \Phi_{n-1}^t \underbrace{\underline{x}(t_{n-1})}_{\Phi_{n-2}^{n-1} \underline{x}(t_{n-2}) + \underline{w}_{n-2}^{n-1}} + \underline{w}_{n-1}^t = \\ &\quad \underbrace{\Phi_{n-3}^{n-2} \underline{x}(t_{n-3}) + \underline{w}_{n-3}^{n-2}}_{\dots \dots \dots} + \dots + \underline{w}_{n-1}^t \\ &= \Phi_{n-3}^t \underline{x}(t_{n-3}) + \underline{w}_{n-1}^t + \Phi_{n-1}^t \underline{w}_{n-2}^{n-1} + \Phi_{n-2}^t \underline{w}_{n-3}^{n-2} + \dots = \\ &= \Phi_0^t \underline{x}(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\Phi_{n-i}^n}_{\Phi_{n-i}^t} \underline{w}_{n-i-1}^{n-i} = \Phi_0^t \underline{x}(t_0) + \underbrace{\sum_{j=1}^n \Phi_j^t \underline{w}_{j-1}^j}_{=\underline{w}_0^t}. \end{aligned}$$

Käytä approksimaatiota

$$\underline{w}_{j-1}^j \approx \delta t \cdot \underline{n}(t_j),$$

siis

$$\underline{x}(t) = \Phi_0^t \underline{x}(t_0) + \delta t \sum_{j=1}^n \Phi_j^t \underline{n}(t_j),$$

joka tunnustetaan integraalin suorakulmiosäännön approksimaatioksi.

Limitissä $n \rightarrow \infty$ saadaan

$$\underline{x}(t) = \Phi_0^t \underline{x}(t_0) + \int_0^t \Phi_\tau^t \underline{n}(\tau) d\tau,$$

siis yhtälön 3.20 kanssa seuraa

$$\underline{w}_0^t = \int_0^t \Phi_\tau^t \underline{n}(\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

Samalla tavalla tämän satunnaiskulun variantin autokovarianssifunktio on

$$\Theta_0^t = A_{w,0}(t, t) = \int_0^t (\Phi_\tau^t) Q_n(\tau) (\Phi_\tau^t)^T d\tau. \quad (3.22)$$

Juuri tässä on tilansiirtomatriisi integraalin sisällä.



Lopuksi huomaa, että edellisissä yhtälöissä voidaan havaita seuraava transitiivinen ominaisuus:

$$\underline{w}_0^t = \overbrace{\Phi_{t'}^t, \underline{w}_0^{t'}}^I + \underline{w}_{t'}^t.$$

Tämä voidaan todistaa sijoittamalla integraali-ilmaisu 3.21:

$$\begin{aligned} \overbrace{\Phi_{t'}^t, \underline{w}_0^{t'}}^I + \underline{w}_{t'}^t &= \Phi_{t'}^t \int_0^{t'} \overbrace{\Phi_{\tau}^{t'} \underline{n}(\tau)}^{\underline{w}_0^{t'}} d\tau + \int_{t'}^t \overbrace{\Phi_{\tau}^t \underline{n}(\tau)}^{\underline{w}_{t'}^t} d\tau = \\ &= \int_0^{t'} \overbrace{\Phi_{t'}^t \Phi_{\tau}^{t'}}^{\Phi_{\tau}^t} \underline{n}(\tau) d\tau + \int_{t'}^t \Phi_{\tau}^t \underline{n}(\tau) d\tau = \int_0^t \overbrace{\Phi_{\tau}^t \underline{n}(\tau)}^{\underline{w}_0^t} d\tau. \end{aligned}$$



3.5.4 Integroinnin yhteenveto

Tilan varianssin differentiaaliyhtälöksi saatiin 3.19:

$$\frac{d}{dt} \Sigma^-(t) = F(t) \Sigma^-(t) + \Sigma^-(t) F^T(t) + Q_n(t).$$

Yhtälö sopii myös matriisin $\Sigma(t)$ integrointiin, jos $F(t)$ on ajan funktio eikä vakio. Tilaestimaattorin integroimiseksi käytetään yhtälöä 3.6:

$$\frac{d}{dt} x^-(t) = F(t) x^-(t).$$

Diskreetissä tapauksessa yhtälö 3.11 yhdessä yhtälön 3.16 kanssa on sopiva tilan $x^-(t)$ integroimiseksi ajassa päivitystapahtumien välillä. Jos matriisi F on vakio, saadaan tilansiirtomatriisi Φ_k^{k+1} suoraan yhtälöllä 3.12.

Tämä kaikki kuitenkin edellyttää, että matriisi F on olemassa eli funktio $F(x, t)$ voidaan linearisoida.



3.6 Havaintomalli

Tilavektorin kehitys ajassa ei ole kovin mielenkiintoinen, ellei sitä voida havaita jollain tavalla. Havaintomalli lineaarisessa tapauksessa on

$$\underline{\ell} = H \underline{x} + \underline{m},$$

jossa $\underline{\ell}$ on havaintosuure, yleisessä tapauksessa vektori, \underline{x} on tilavektori eli ”oikea arvo” ja \underline{m} on havaintoprosessin ”kohina” eli mittauksen

satunnainen virhe. H on *havaintomatriisi*⁵. Oletetaan, että odotusarvo $E\{\underline{m}\} = 0$. Havaintovektorin varianssimatriisi on

$$R \stackrel{\text{def}}{=} E\{\underline{m} \underline{m}^T\}.$$

Olkoon havaintohetki eli epookki t . Tilavektorin estimaattori eteenpäin laskettuna tähän hetkeen on $\underline{x}^- = \underline{x}^-(t)$. Tästä lasketaan havaintosuureen estimaattori:

$$\hat{\underline{\ell}} = H \underline{x}^-.$$

Nyt voidaan muodostaa *nollasuure* — suure, jonka odotusarvo $E\{\cdot\}$ on nolla — seuraavasti:

$$\underline{y} = \hat{\underline{\ell}} - \underline{\ell} = H \underline{x}^- - \underline{\ell} = H \cdot (\underline{x}^- - \underline{x}) - \underline{m},$$

ja siis

$$E\{\underline{y}\} = H \cdot (E\{\underline{x}^-\} - E\{\underline{x}\}) - E\{\underline{m}\} = H \cdot 0 - 0 = 0,$$

olettamuksen $E\{\underline{x}^-\} = E\{\underline{x}\}$ perusteella, että \underline{x}^- on tilan \underline{x} *harhaton* estimaattori.

Epälineaarisessa tapauksessa H ei ole matriisi vain tilavektorin funktio $H(\underline{x})$:

$$\underline{\ell} = H(\underline{x}) + \underline{m}$$

ja

$$\hat{\underline{\ell}} = H(\underline{x}^-),$$

ja erotus on

$$\underline{y} = \hat{\underline{\ell}} - \underline{\ell} \approx H \cdot (\underline{x}^- - \underline{x}) - \underline{m}.$$

Matriisin H alkiot määritellään seuraavasti:

$$H_{ij} = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} H_i(\overbrace{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n}^{\underline{x}}) \right|_{\underline{x}=\underline{x}^{(0)}}.$$

H on funktion $H(\underline{x})$ *Jacobin matriisi* eli osittaisderivaattojen matriisi. Sen laskenta tapahtuu vektorin $\underline{x}^{(0)}$ sisältämällä tilavektorin likiarvoilla.

Varianssien ja kovarianssien laskemiseksi oletetaan, että \underline{x}^- ja \underline{m} sekä \underline{x} ja \underline{m} ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan. Tämä on järkevä oletus, onhan havaintoprosessi yleensä fyysikaalisesti täysin riippumaton

⁵Tämä on käytännössä sama kuin pienimmän neliösumman tasoituksen matriisi A eli *rakennematriisi*.

järjestelmän dynaamisesta prosessista. Lisäksi eri epookkien havainto-prosessit ovat tavallisesti riippumattomia toisistaan.

Lasketaan

$$\begin{aligned}\text{Var}\{\underline{y}\} &= \mathbb{E}\{\underline{y}\underline{y}^T\} = H \mathbb{E}\{(\underline{x}^- - \underline{x})(\underline{x}^- - \underline{x})^T\} H^T + R = \\ &= H \Sigma^- H^T + R, \\ \text{Cov}\{\underline{y}, \underline{x}^-\} &= \mathbb{E}\{\underline{y} \cdot (\underline{x}^- - \underline{x})^T\} = H \Sigma^-, \\ \text{Cov}\{\underline{x}^-, \underline{y}\} &= \Sigma^- H^T.\end{aligned}$$



3.7 Päivitys

Erolla \underline{y} estimoidusta tilavektorista \underline{x}^- lasketun havaintosuureen $\hat{\ell}$ ja todellisen havainnon $\underline{\ell}$ välillä on odotusarvo nolla. Päivitysaskel käyttää tätä seikkaa optimaalisesti hyväkseen.

Muodostetaan siis parannettu estimaattori⁶,

$$\underline{x}^+ = \underline{x}^- - K \underline{y} = \underline{x}^- - K \cdot (H \underline{x}^- - \underline{\ell}) = \underline{x}^- - K \cdot (H \cdot (\underline{x}^- - \underline{x}) - \underline{m})$$

eli

$$(\underline{x}^+ - \underline{x}) = (I - KH) (\underline{x}^- - \underline{x}) - K \underline{m}.$$

Tässä matriisi K tunnetaan nimellä Kalmanin vahvistusmatriisi eli *gain matrix*.

Määritelmän 3.10 mukaan saamme käyttää tätä yhtälöä tilavarianssin päivitysyhtälön johtamiseksi:

$$\Sigma^+ = (I - KH) \Sigma^- (I - KH)^T + K R K^T. \quad (3.23)$$

Optimaalinen ratkaisu saadaan valitsemalla

$$K = \Sigma^- H^T (H \Sigma^- H^T + R)^{-1}, \quad (3.24)$$

joka antaa ratkaisuksi

$$\underline{x}^+ = \underline{x}^- - K \cdot (H \underline{x}^- - \underline{\ell}) = \underline{x}^- - \Sigma^- H^T (H \Sigma^- H^T + R)^{-1} (H \underline{x}^- - \underline{\ell}). \quad (3.25)$$

⁶Plus-merkin käyttö yläindeksinä merkitsee tässä tilavektoria havainnon käytön eli päivityksen *jälkeen* (*a posteriori*). Myös muita merkintätapoja löytyy, muun muassa alaindeksit k ja $k + 1$, jolla viitataan tiloihin ennen ja jälkeen.

Jos kutsutaan

$$P \stackrel{\text{def}}{=} (H\Sigma^{-}H^T + R)^{-1} \implies K = \Sigma^{-}H^TP,$$

voimme kirjoittaa yhtälön 3.23 auki:

$$\Sigma^{+} = \overbrace{(I - \Sigma^{-}H^TPH) \Sigma^{-} (I - \Sigma^{-}H^TPH)^T}^{\text{I}} + \overbrace{\Sigma^{-}H^TPRPH\Sigma^{-}}^{\text{II}},$$

jossa

$$\begin{aligned} \text{I} &= (I - \Sigma^{-}H^TPH) \Sigma^{-} (I - \Sigma^{-}H^TPH)^T = \\ &= \Sigma^{-} - \Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-} - \Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-} + \overbrace{\Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-}}^{\text{III}} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \text{III} + \text{II} &= \Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-} + \Sigma^{-}H^TPRPH\Sigma^{-} = \\ &= \Sigma^{-}H^TP \overbrace{(H\Sigma^{-}H^T + R)^{-1}}^{P^{-1}} PH\Sigma^{-} = \Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-}, \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} \Sigma^{+} &= \Sigma^{-} - \Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-} - \cancel{\Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-}} + \cancel{\Sigma^{-}H^TPH\Sigma^{-}} = \\ &= \Sigma^{-} - \Sigma^{-}H^T \overbrace{(H\Sigma^{-}H^T + R)^{-1}}^P H\Sigma^{-}. \end{aligned}$$

Lyhennetään tämä varianssin päivitysyhtälö vielä seuraavasti:

$$\Sigma^{+} = \Sigma^{-} - \Sigma^{-}H^T (H\Sigma^{-}H^T + R)^{-1} H\Sigma^{-} = (I - KH) \Sigma^{-}, \quad (3.26)$$

Kalmanin vahvistusmatriisin K määritelmän perusteella.

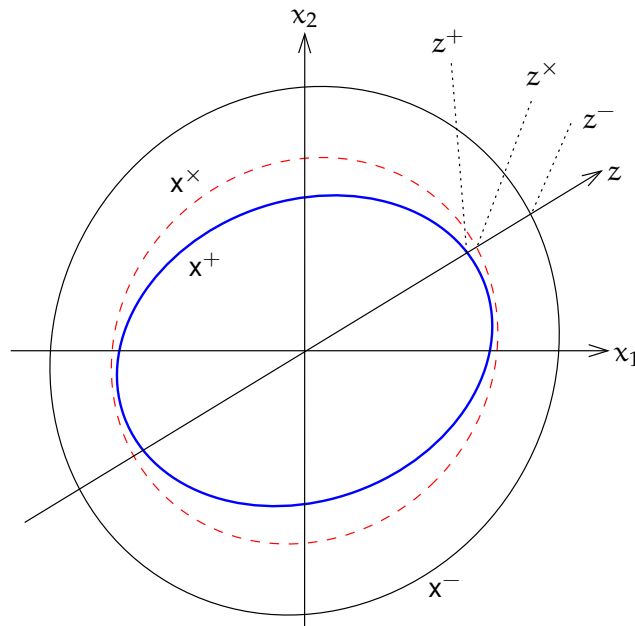
Ehkä intuitiivisempänä yhteenvetona:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{+} &= \mathbf{x}^{-} - \text{Cov}\{\mathbf{x}^{-}, \mathbf{y}\} \text{Var}^{-1}\{\mathbf{y}\} \mathbf{y}, \\ \text{Var}\{\mathbf{x}^{+}\} &= \text{Var}\{\mathbf{x}^{-}\} - \text{Cov}\{\mathbf{x}^{-}, \mathbf{y}\} \text{Var}^{-1}\{\mathbf{y}\} \text{Cov}\{\mathbf{y}, \mathbf{x}^{-}\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

jonkinlainen tilavektorin estimaattorin \mathbf{x}^{-} regressio "sulkuvirheen" \mathbf{y} suhteen.

Näin ovat löytyneet Kalmanin suotimen *päivitysyhtälöt* sekä tilavektoreille että sen varianssimatriisille.





KUVA 3.4. Optimaalisen estimaattorin virhe-ellipsi (sininen) on kokonaan muiden estimaattorien — myös päivitystä edeltävän estimaattorin! — virhe-ellipsien sisällä.



Kirjallisuudesta löytyy monta tapaa laskea nämä yhtälöt tehokkaasti ja tarkasti. Pääasia kuitenkin on, että ”sulkuvirheen” varianssimatriisi

$$\text{Var}\{\underline{y}\} = \mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$$

on vektorin \underline{y} kokoinen. Ja vektorin \underline{y} koko on yhtä kuin samanaikaisten havaintojen lukumäärä. Tästä syystä Kalmanin suodinta kutsutaan myös *perättäiseksi suotimeksi*, koska se käsittelee havainnot epookki kerrallaan eikä, kuten esimerkiksi perinteinen tasoituslasku, kaikki yhtä aikaa.



3.8 Päivityksen optimaalisuus

Yhtälöt 3.27 ovat *optimaalisia* pienimmän neliösumman merkityksessä. Sen todistaminen onnistuu seuraavasti, vain hieman yksinkertaistaen.

Ensin lasketaan ensimmäisen yhtälön 3.27 avulla:

$$\text{Cov}\{\mathbf{x}^+, \underline{y}\} = \text{Cov}\{\mathbf{x}^-, \underline{y}\} - \text{Cov}\{\mathbf{x}^-, \underline{y}\} \text{Var}^{-1}\{\underline{y}\} \text{Var}\{\underline{y}\} = 0, \quad (3.28)$$

muistamalla, että määritelmän mukaan $\text{Cov}\{\underline{y}, \underline{y}\} = \text{Var}\{\underline{y}\}$.

Oleta nyt, että löytyy vaihtoehtoinen päivitetty tilavektori \mathbf{x}^\times , harha-ton estimaattori, joka olisi standardipäivitystä \mathbf{x}^+ parempi. Vaikkapa

$$\mathbf{x}^\times = \mathbf{x}^+ + \mathbf{C}\underline{y}$$



jollakin kerroinmatriisilla C . Silloin yhtälön 3.28 ansiosta olisi

$$\text{Var}\{x^\times\} = \text{Var}\{x^+\} + C \text{Var}\{y\} C^T.$$

Koska $\text{Var}\{y\}$ on positiivisesti definiitti, on ilmaisu

$$\text{Var}\{x^\times\} - \text{Var}\{x^+\} = C \text{Var}\{y\} C^T$$

positiivisesti semidefiniitti ja

$$\text{Var}\{x^\times\} - \text{Var}\{x^+\} = 0$$

vain, jos $C = 0$.

Toisin sanoen mielivaltaisella lineaariyhdistelmällä

$$\underline{z} = \sum_i c_i \underline{x}_i, \quad z^\times = \sum_i c_i x_i^\times, \quad z^+ = \sum_i c_i x_i^+,$$

pätee

$$\text{Var}\{z^\times\} - \text{Var}\{z^+\} = \underline{c} C \text{Var}\{y\} C^T \underline{c}^T$$

jossa $\underline{c} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$. Tämä haviää vain, jos $\underline{c} C = 0$, muuten

$$\text{Var}\{z^\times\} - \text{Var}\{z^+\} > 0.$$

Kaksiulotteinen tapaus esitetään graafisesti kuvassa 3.4.

Siis *optimaalisen estimaattorin* x^+ varianssiellipsi — yleisemmin (hyper-)ellipsoidi — on aina *kokonaan* mielivaltaisen vaihtoehtoisen estimaattorin x^\times varianssi-ellipsin *sisällä*, tai pahimmillaan koskettaa sitä sisältä. Komponenttien mielivaltaisen lineaariyhdistelmän \underline{z} variansseille pätee sama asia.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on Kalmanin suotimen tilavektori?
- 2) Mikä on Kalmanin suotimen dynaaminen malli?
- 3) Miten dynaaminen malli linearisoidaan?
- 4) Mikä on tilansiirtomatriisi?
- 5) Mikä on tilansiirtomatriisin ja lineaarisen dynaamisen mallin kerroinmatriisin F välinen suhde?
- 6) Mikä on Kalmanin suotimen havaintomalli?
- 7) Mikä on Kalmanin suotimen päivitysaskel?





Harjoitus 3 – 1: Yksinkertainen, kaksiulotteinen dynaaminen malli

Annettuna on seuraava kaksiulotteinen Gaussin ja Markovin mallin kaltainen dynaaminen malli:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Tässä $k \in (0, 1)$ on pieni vaimennusvakio.

1) Koska matriisi

$$F = \begin{bmatrix} -k & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

on vakio, seuraa, että ehto 3.17 pätee ja tilansiirtomatriisi voidaan kirjoittaa eksponenttikehitelmänä. Johda ensin yleinen matriisin F potenssien F^n , $n \in \mathbb{N}$, ilmaisu tässä eksponenttikehitelmässä.

2) Mikä on F^0 ? Mikä on F^{-1} ?

3) Johda eksponentiaalifunktio $e^{F \Delta t}$ aika-askelin Δt Taylorin sarjakehitelmänä. Kirjoita ensimmäiset neljä termiä auki.

4) Näytä, että yhtälössä esiintyvä tilansiirtomatriisi Φ_i^{i+1} on seuraavan muotoinen:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(t_{i+1}) \\ \underline{y}(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \overbrace{e^{-k\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\Phi_i^{i+1}} \begin{bmatrix} \underline{x}(t_i) \\ \underline{y}(t_i) \end{bmatrix} + \dots \quad (3.30)$$

Tässä jätettiin kohinatermi pois yksinkertaisuuden vuoksi, ja $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

Vihje Käytä symbolista laskentaa tai sijoita yhtälö 3.30 sijoituksilla $\Delta t = t_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} t$ and $t_i = 0$ yhtälöön 3.29 ja näytä, että se on identtinen yhtälö.



Harjoitus 3 – 2: Dynaamisen kohinan varianssin transitiivinen ominaisuus

Johda transitiivinen ominaisuus samalla tavalla kuin dynaamiselle kohinalle \underline{w}_0^t alaosiossa 3.5.3:

$$\theta_0^t = (\Phi_{t'}^t) \theta_0^{t'} (\Phi_{t'}^t)^\top + \theta_{t'}^t.$$

Näytä sijoittamalla yhtälö 3.22, että tämä on identtinen yhtälö.





Kalmanin suotimen esimerkkejä ja sovelluksia

4



4.1 Esimerkki 1: yksiulotteinen liike

Tässä esimerkissä fysikaaliset yksiköt jätetään tarkastelun ulkopuolelle. Oletetaan, että matkojen tai koordinaattien yksikkö on metri ja ajan yksikkö on sekunti.

Kysymys Oleta avaruuden yhdessä ulottuvuudessa, että tilavektorin

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix}$$

dynaaminen malli on

$$\frac{d^2}{dt^2} \underline{x} = \underline{n}.$$

Malli on lineaarinen. Muunnetaan se matriisiyhtälöksi, jossa on vain ensimmäisiä derivaattoja ajan suhteen:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}.$$

Tässä \underline{n} on valkoinen kohina, jonka autokovarianssi on $Q_n = 1$.

Oleta lisäksi, että alkutilasta on annettu estimaatti

$$\hat{\underline{x}}(0) = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma(0) = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx}(0) & 0 \\ 0 & \Sigma_{vv}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix},$$

toisin sanoen meillä ei ole käyttökelpoista tietoa nopeudesta.

1) Laske tämä tilatieto eteenpäin hetkelle $t = 5$, siis laske

$$\hat{\underline{x}}(5) = \underline{x}^-(5),$$

$$\Sigma(5) = \Sigma^-(5).$$

2) Hetkellä $t = 5$ suoritetaan lisähavainto, joka antaa arvon 3:

$$\underline{\ell}' = \mathbf{x}^-(5) + \underline{\mathbf{m}} = 3.$$

Suure $\underline{\mathbf{m}}$ on havainnon satunnainen virhe eli kohina, jonka varianssi on $R = 3$.

(a) Minkä näköinen on matriisi H ? Ja matriisi K ?

(b) Laske *a posteriori* tila $\mathbf{x}^+(5), \Sigma^+(5)$.

3) Laske vaihtoehtoisesti vastaus käyttäen standardi pienimmän neliösumman tasoitusta. Dynaaminen malli on

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(0) + \hat{\mathbf{v}}(0) \cdot t,$$

estimoitavissa olevat tuntemattomat ovat $\hat{\mathbf{x}}(0)$ ja $\hat{\mathbf{v}}(0)$ eli abstrakti vektori $\hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(0) & \hat{\mathbf{v}}(0) \end{bmatrix}^T$, ja havaintoyhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \underline{\ell}_1 + \mathbf{v}_1 &= \hat{\mathbf{x}}(0), \\ \underline{\ell}_2 + \mathbf{v}_2 &= \hat{\mathbf{x}}(5). \end{aligned}$$

Havaintojen vektori ja sen varianssimatriisi ovat

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(0) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Vastaus 1) $\hat{\mathbf{x}}(5) = \hat{\mathbf{x}}(0) + \hat{\mathbf{v}}(0) \cdot 5 = 4$. Koska kerroinmatriisi

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

saadaan tilansiirtomatriisi muodossa

$$\begin{aligned} \Phi_0^5 &= e^{F\Delta t} = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= I + \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

koska

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n = 0, \quad n > 1.$$



Nyt yhtälöiden 3.13 ja 3.15 avulla:

$$\begin{aligned}
 \Sigma^-(5) &= \Sigma(5) = (\Phi_0^5) \Sigma(0) (\Phi_0^5)^T + \int_0^5 (\Phi_t^5) Q_n(t) (\Phi_t^5)^T dt = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \\
 &\quad + \int_0^5 \begin{bmatrix} 1 & 5-t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5-t & 1 \end{bmatrix} dt = \\
 &= \begin{bmatrix} 25\,002 & 5000 \\ 5000 & 1000 \end{bmatrix} + \int_0^5 \begin{bmatrix} (5-t)^2 & 5-t \\ 5-t & 1 \end{bmatrix} dt = \\
 &= \begin{bmatrix} 25\,002 & 5000 \\ 5000 & 1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(5-t)^3 & -\frac{1}{2}(5-t)^2 \\ -\frac{1}{2}(5-t)^2 & t \end{bmatrix}_0^5 = \\
 &= \begin{bmatrix} 25\,002 & 5000 \\ 5000 & 1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{125}{3} & \frac{25}{2} \\ \frac{25}{2} & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 25\,043,7 & 5012,5 \\ 5012,5 & 1005,0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(Esitetyt luvut on pyöristetty laskelmassa käytetyistä tarkkoista arvoista.)

2) Matriisi $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Siis¹

$$H\Sigma^-H^T + R = 25\,043,7 + 3 = 25\,046,7.$$

K-matriisi on

$$\begin{aligned}
 K &= \Sigma^-H^T (H\Sigma^-H^T + R)^{-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} 25\,043,7 \\ 5012,5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{25\,046,7} = \begin{bmatrix} 0,999\,88 \\ 0,200\,13 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Seuraavaksi lasketaan nollasuure eli "sulkuvirhe"

$$\underline{y} = Hx^-(5) - \underline{\ell}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 = 1.$$

Seuraa

$$\begin{aligned}
 x^+(5) &= x^-(5) - K\underline{y} = \\
 &= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,999\,88 \\ 0,200\,13 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 3,000\,12 \\ -0,200\,13 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

¹Merkintätapa: $\Sigma^- = \Sigma(5)$ on *a priori* tilan varianssimatriisi, juuri ennen havainnon tekoa ajan hetkellä $t = 5$.

Projisoidaan tämä takaisin hetkelle $t = 0$:

$$\begin{aligned}\hat{x}(0) &= x^+(5) - v^+(5) \cdot 5 = \\ &= 3,000\,12 - (-0,200\,13) \cdot 5 = 4,000\,77, \quad (4.2) \\ \hat{v}(0) &= v^+(5) = -0,200\,13.\end{aligned}$$

Päivitetty tilan varianssimatriisi $\Sigma^+(5)$ on

$$\begin{aligned}\Sigma^+(5) &= (I - KH) \Sigma^-(5) = \\ &= \left(I - \begin{bmatrix} 0,999\,88 \\ 0,200\,13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 25\,043,7 & 5012,5 \\ 5012,5 & 1005,0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2,999\,64 & 0,600\,38 \\ 0,600\,38 & 1,866\,28 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3) Rakennematriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

ja havaintojen vektori ℓ ja havaintojen varianssimatriisi S on annettu, yhtälöt 4.1. Saadaan ratkaisu

$$\begin{aligned}A^T S^{-1} A &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix}, \\ \hat{x}(0) &= (A^T S^{-1} A)^{-1} A^T S^{-1} \ell = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tämä on käytännössä sama tulos kuin kohdassa 2 yhtälöt 4.2. Ratkaisun varianssi on

$$\text{Var}\{\hat{x}(0)\} = (A^T S^{-1} A)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

mitä ei voida verrata suoraan aikaisempaan tulokseen, koska sen ajanhetki eli epookki on $t = 0$. Tämän lisäksi Kalmanin ratkaisu sisältää dynaamisen kohinan vaikutuksen Q_n , jota ei perinteisessä pienimmän neliösumman menetelmässä oteta huomioon.



4.2 Esimerkki 2: pyörivä pyörä

Kysymys Teollisuuskoneessa pyörii pyörä, jonka säde on r . Pyörä pyörii kulmanopeudella $\omega(t)$, jossa t on aika. Hetkellinen kulmanopeus vaihtelee satunnaisesti: kulmakiihtyvyydellä on ”valkoisen kohinan” ominaisuudet.



- 1) Kirjoita tämän järjestelmän tilavektori. Montako alkiota tarvitaan?
- 2) Kirjoita järjestelmän dynaaminen malli.
- 3) Pyörän reunaan kiinnitetään heijastusprisma mittauksia varten. Pyörähdysliikettä seurataan laseretäisyysmittauksen avulla. Mittauslaite on kaukana koneesta pyörän tasossa. Kirjoita havaintomalli.
- 4) Linearisoi havaintomalli.
- 5) Millä tavalla dynaaminen malli muuttuu linearisoinnin seurauksena?

Vastaus

- 1) Tämän järjestelmän tilavektori sisältää paikkakulman $\alpha(t)$. Kuitenkin on annettuna, että *kulmakiiktyvyys* $\frac{d}{dt}\omega(t)$ on luonteeltaan valkoista kohinaa. Tästä syystä on viisasta sisällyttää myös kulmanopeus tilavektoriin.

Näin saadaan tilavektoriksi

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}.$$

- 2) Kalmanin suotimessa dynaaminen malli on yhtälöryhmä, joka on muotoa

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}(t), t) + \underline{\mathbf{n}},$$

jossa $\underline{\mathbf{x}}$ on järjestelmän tilavektori ja $\underline{\mathbf{n}}$ on dynaaminen kohinavektori.

Tilavektori on yllä annettu. Kirjoitetaan

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

jossa ensimmäinen yhtälö, $\frac{d}{dt}\underline{\alpha} = \underline{\omega}$, ilmaisee kulmanopeuden ω määritelmän ja toinen yhtälö, $\frac{d}{dt}\underline{\omega} = \underline{n}_\omega$, ilmaisee sen, että kulmakiiktyvyydellä on valkoisen kohinan ominaisuudet.

Havaitsemme, että löytynyt dynaaminen malli on *lineaarinen*:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix}.$$



- 3) Jos etäisyys pyörän reunaan kiinnitettyyn prismaan havaitaan kaukaa, havaintoyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\underline{s} = d + r \cos \alpha + \underline{m}. \quad (4.4)$$

Kulma α lasketaan prisman sijainnista, joka on kauimpana havaintolaitteesta. Oletetaan d , etäisyys laitteen ja pyörän akselin välillä, tunnetuksi. Ellei se ole, se on lisättävä tilavektoriin dynaamisella lisäyhtälöllä $\frac{d}{dt}d = 0$.

- 4) Tämä malli on epälineaarinen: havaintosuureen riippuvuus tilavektorista on kosini.

Linearisoidaan seuraavalla tavalla: määrittele keskenään yhteensopivia likiarvoja, joilla

$$s^{(0)} = d + r \cos \alpha^{(0)},$$

ja vähennä tämä yhtälöstä 4.4. Tulos on Taylorin sarjakehitelmä katkaistuna ensimmäisen eli lineaarisen $\Delta\alpha$ -termin jälkeen:

$$\Delta \underline{s} = r \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \cos \alpha \right|_{\alpha=\alpha^{(0)}} \cdot \Delta \underline{\alpha} + \underline{m}.$$

Tässä on sovellettu loogisia määritelmiä $\Delta \underline{s} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{s} - s^{(0)}$ ja $\Delta \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha - \alpha^{(0)}$.

Osittaisdifferentiointi antaa

$$\underbrace{\Delta \underline{s}}_{\underline{\ell}} = -r \sin \alpha^{(0)} \Delta \underline{\alpha} + \underline{m} = \underbrace{\begin{bmatrix} -r \sin \alpha^{(0)} & 0 \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \underline{\alpha} \\ \Delta \underline{\omega} \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\underline{m}}_{\underline{m}},$$

lineaarinen Kalmanin havaintoyhtälö tyyppi

$$\underline{\ell} = H\underline{x} + \underline{m},$$

jos kirjoitetaan muodollisesti

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{s} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha^{(0)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{\alpha} \\ \Delta \underline{\omega} \end{bmatrix}, \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} \underline{m} \end{bmatrix}.$$

- 5) Yhteensopiva likitilavektorin dynaaminen malli on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{(0)} \\ \underline{\omega}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\omega}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix},$$



jonka vähennys dynaamisesta mallista 4.3 antaa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \underline{\alpha} \\ \Delta \underline{\omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta \underline{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{\alpha} \\ \Delta \underline{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa $\Delta \underline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\omega} - \underline{\omega}^{(0)}$. Tämä on "linearisoitu" dynaaminen malli, jossa tilavektori koostuu deltasuureista.



4.3 Esimerkki 3: laskuvarjohyppääjä

Kysymys

- 1) Kirjoita laskuvarjohyppääjän dynaamiset yhtälöt yhdessä ulottuvuudessa: ainoa koordinaatti on korkeus z . Painovoimakiihtyvyys g on vakio. Ilmanvastuksen aiheuttama jarrutuskihtyvyys on verrannollinen putoamisnopeuteen ja ilman tiheyteen, jonka yhtälöksi saa kirjoittaa

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

Vakio H on ilmakehän skaalakorkeus, ja ρ_0 on ilman tiheys merenpinnalla.

- 2) Hyppääjään kiinnitetään heijastintarra mittauksia varten. Maassa oleva takymetri mittaa etäisyyttä tähän heijastimeen. Vaakaetäisyys takymetrin ja laskeutumipaikan välillä on annettu. Hyppääjä tulee suoraan alas, tuulta ei ole. Kirjoita havaintomalli.

Vastaus

- 1) Dynaaminen malli on, kun k on ilmanvastuksen vakio²:

$$\frac{d^2}{dt^2} z = -g + k\rho \dot{z} + \underline{n} = -g + k\rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \dot{z} + \underline{n}.$$

Määritellään tilavektoriksi $\begin{bmatrix} z & \dot{z} \end{bmatrix}^T$, jolloin saadaan dynaamisiksi malliksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ -g + k\rho_0 \dot{z} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

²Negatiivinen vakio, koska myös \dot{z} on negatiivinen, jos z kasvaa ylöspäin.

Tämä yhtälö on epälineaarinen. Kirjoita

$$\begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{\dot{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{(0)} \\ \dot{z}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \underline{z} \\ \Delta \underline{\dot{z}} \end{bmatrix},$$

jossa

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z^{(0)} \\ \dot{z}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}^{(0)} \\ -g + k\rho_0 \dot{z}^{(0)} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Tämä yhtälö voidaan integroida, jos alkuehdot on annettu, esimerkiksi $z^{(0)}(t_0) = h, \dot{z}^{(0)}(t_0) = 0$, jossa h on lentokoneen nimelliskorkeus.

Vähennetään yhtälö 4.6 yhtälöstä 4.5:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{z} - z^{(0)} \\ \underline{\dot{z}} - \dot{z}^{(0)} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\dot{z}} - \dot{z}^{(0)} \\ k\rho_0 \left(\underline{\dot{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) - \dot{z}^{(0)} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \underline{z} \\ \Delta \underline{\dot{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta \underline{\dot{z}} \\ k\rho_0 \Delta \left(\underline{\dot{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa $\Delta \underline{z} = \underline{z} - z^{(0)}, \Delta \underline{\dot{z}} = \underline{\dot{z}} - \dot{z}^{(0)}$ ja (linearisointi)

$$\begin{aligned} \Delta \left(\underline{\dot{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) \right) &= \underline{\dot{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) - \dot{z}^{(0)} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \approx \\ &\approx -\frac{\dot{z}^{(0)}}{H} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \Delta z + \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \Delta \dot{z} = \\ &= \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \left(\Delta \dot{z} - \frac{\dot{z}^{(0)}}{H} \Delta z \right). \end{aligned}$$

Lyhennetään

$$\mathcal{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right).$$

Sijoitus antaa silloin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\dot{z}} \\ \Delta \underline{z} \\ \Delta \underline{\dot{z}} \end{bmatrix}}^{\underline{x}} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \underline{\dot{z}} \\ k\rho_0 \mathcal{Z} \left(\Delta \underline{\dot{z}} - \frac{\dot{z}^{(0)}}{H} \Delta \underline{z} \right) \end{bmatrix}}^{F(\underline{x}, t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}}^{\underline{n}} = \\ &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k\rho_0 \frac{\dot{z}^{(0)}}{H} \mathcal{Z} & k\rho_0 \mathcal{Z} \end{bmatrix}}^{F(t)} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \underline{z} \\ \Delta \underline{\dot{z}} \end{bmatrix}}^{\underline{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Tämä on linearisoitu dynaaminen malli.

- 2) Olkoon vaakaetäisyys laskuvarjohyppääjän laskeutumipaikan ja takymetrin välillä r . Silloin mitattu etäisyys on

$$s = \sqrt{r^2 + z^2}$$

ja havaintoyhtälö

$$\underline{s} = \sqrt{r^2 + \underline{z}^2} + \underline{m}.$$

Linearisointi — $s = s_0 + \Delta s$, jossa $s_0 = \sqrt{r^2 + z_0^2}$ — antaa käyttäen

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial(z^2)} \sqrt{r^2 + (z^2)} = 2z \cdot \frac{1}{2\sqrt{r^2 + (z^2)}} = \frac{z}{s}$$

linearisoidun havaintoyhtälön

$$\underbrace{\Delta \underline{s}}_{\ell} = \underbrace{\frac{z_0}{s_0}}_{H} \Delta \underline{z} + \underline{m} = \begin{bmatrix} \frac{z_0}{s_0} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \underline{z} \\ \Delta \underline{\dot{z}} \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\underline{m}}_{\underline{m}}.$$



4.4 Realistisen tilastollisen käyttäytymisen mallintaminen

Värillistä kohinaa, tarkemmin Gaussin ja Markovin prosesseja, käytetään usein tosielämän stokastisten prosessien mallinnuksessa.

Saatomme esmerkiksi tietää, että mitattu stokastinen prosessi koostuu kahdesta osasta. Toinen osa on *signaali* \underline{s} , josta olemme kiinnostuneita ja joka vaihtelee nopeasti aikaskaalalla τ_s . Tiedämme, että tämän signaalin odotusarvo on nolla. Toinen on systemaattinen häiriö eli *harha* \underline{b} , josta haluamme päästä eroon. Tiedämme myös, että tämä häiriö vaihtelee hitaasti aikaskaalalla, jota luonnehtii vakio τ_b .

Tilavektori voidaan kirjoittaa muotoon $\begin{bmatrix} \underline{s} & \underline{b} \end{bmatrix}^T$ ja dynaaminen yhtälö muotoon

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_s & 0 \\ 0 & -1/\tau_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n}_s \\ \underline{n}_b \end{bmatrix}.$$

Tässä τ_b on hitaasti vaihtelevan häiriöprosessin pitkä aikavakio. Aikavakioksi τ_s saa valita paljon lyhyemmän arvon. Se pitää kuitenkin valita



realistisesti. Jos mittaukset saadaan aikavälillä Δt , on oltava $\tau_s \gtrsim 2 \Delta t$, jotta prosessi \underline{s} olisi realistisesti määritettävissä havainnoista.

Havaintoyhtälö on

$$\underline{\ell} = \underline{s} + \underline{b} + \underline{m},$$

jossa \underline{m} ja sen varianssi R edustavat havainnon kohinaa ja epävarmuutta. Jos havainnot tehdään riittävän tiheästi, voidaan saada erikseen estimaatteja sekä signaaliprosessista \underline{s} että hitaasti muuttuvasta harhasta \underline{b} . Jotta tämä toimisi, realistisia autokovarianssiarvoja on liitettävä prosesseille \underline{n}_s ja \underline{n}_b . Lisäksi vaaditaan, että $E\{\underline{s}\} = 0$. Ellei ole, prosessin \underline{s} systemaattinen osa joutuu suotimen tuottaman estimaattorin $\hat{\underline{b}}$ osaksi.

Tässä tapahtuu *spektraalisuodatus* Kalmanin suotimen avulla. Matalan taajuuden osa, nollataajuus mukaan lukien, menee estimaattoriin $\hat{\underline{b}}$, ja korkean taajuuden osa menee estimaattoriin $\hat{\underline{s}}$. Spektraalialueiden välinen raja ei ole terävä.

Jokseenkin päinvastainen tilanne syntyy, jos mittauksen kohteena on stokastinen prosessi, joka koostuu nopeasti vaihtelevasta kohinaosasta ja hitaasti muuttuvasta signaalista. Oleta, että kohina *ei ole valkoinen* vaan ”värillinen”. Kutsu sitä nimellä \underline{c} . Sillä on korrelaatiopituus τ_c . Jos olemme kiinnostuneita vain signaalin \underline{s} matalampien taajuuksien osuuksista, voimme käyttää Kalmanin suodinta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_s & 0 \\ 0 & -1/\tau_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n}_s \\ \underline{n}_c \end{bmatrix}.$$

Valitaan τ_s sen mukaan, mistä signaalin \underline{s} spektrin osasta olemme kiinnostuneita — mutta aina $\tau_s > \tau_c$. Aikavakio τ_c on valittava realistisesti, niin että se vastaanottaa ja poistaa mahdollisimman paljon prosessin oikeasta kohinasta. Havaintoyhtälö on taas

$$\underline{\ell} = \underline{s} + \underline{c} + \underline{m}.$$

Aiemmin kuvattua tekniikkaa, jolla erotetaan nopeasti vaihteleva signaali hitaasti muuttuvasta taustasystematiikasta, käytettiin (Tapley ja Schutz, 1975) jo Kuun pinnan alaisten massakeskittymien eli ”masconien” signaalien erottamiseksi Lunar Orbiter -satelliittien dopplersiirtymän seurantadatasta. Tekniikan nimi on *dynamic model compensation*.



4.5 Kalmanin suodin perättäisenä tasoituksena

Kalmanin suotimen päivitysaskel voidaan kirjoittaa parametrisena tasoitustehtävänä.



”Havainnot” ovat päivityksen todellinen havaintovektori $\underline{\ell}'$ ja *a priori* estimoitu päivityshetken t tilavektori $\mathbf{x}^-(t)$.

Parametriset havaintoyhtälöt ovat standardimuodossa

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\ell}' \\ \mathbf{x}^- \end{bmatrix}}_{\underline{\ell}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}' \\ \underline{\mathbf{v}}'' \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{v}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}^+ \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}}.$$

Rakennematriisiin nähdään olevan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

”Havaintojen” varianssimatriisi on

$$\mathbf{S} = \text{Var} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{\ell}' \\ \mathbf{x}^- \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma^- \end{bmatrix},$$

ja *a posteriori* tilavektorin ratkaisu on

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \underline{\ell} = \\ &= \left(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + (\Sigma^-)^{-1} \right)^{-1} \left(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{\ell}' + (\Sigma^-)^{-1} \mathbf{x}^- \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

A posteriori tilavarianssi on

$$\Sigma^+ = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + (\Sigma^-)^{-1} \right)^{-1}. \quad (4.8)$$

Katso Kallio (1998), sivut 63–64.

Nyt käytetään liitteessä C johdettua Woodburyn yhtälöä C.5,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{VA}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{VA}^{-1},$$

seuraavalla tavalla:

$$\left(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + (\Sigma^-)^{-1} \right)^{-1} = \Sigma^- - \Sigma^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \Sigma^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \Sigma^-. \quad (4.9)$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \left(\Sigma^- - \Sigma^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \Sigma^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \Sigma^- \right) \left(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{\ell}' + (\Sigma^-)^{-1} \mathbf{x}^- \right) = \\ &= \Sigma^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{\ell}' + \mathbf{x}^- - \Sigma^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \Sigma^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} (\Sigma^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{\ell}' + \mathbf{x}^-) = \\ &= \mathbf{x}^- + \Sigma^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{\ell}' - \underbrace{\Sigma^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \Sigma^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \Sigma^- \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{\ell}'}_{\mathbf{I}} - \\ &\quad - \Sigma^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \Sigma^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x}^-, \end{aligned}$$



jossa

$$\begin{aligned} I &= -\Sigma^{-H^T} (R + H\Sigma^{-H^T})^{-1} H\Sigma^{-H^T} R^{-1} \underline{\ell}' = \\ &= -\Sigma^{-H^T} (R + H\Sigma^{-H^T})^{-1} (R + H\Sigma^{-H^T}) R^{-1} \underline{\ell}' + \\ &\quad + \Sigma^{-H^T} (R + H\Sigma^{-H^T})^{-1} R R^{-1} \underline{\ell}' = \\ &= -\Sigma^{-H^T} R^{-1} \underline{\ell}' + \Sigma^{-H^T} (R + H\Sigma^{-H^T})^{-1} \underline{\ell}', \end{aligned}$$

antaen

$$\begin{aligned} x^+ &= x^- + \Sigma^{-H^T} R^{-1} \underline{\ell}' - \Sigma^{-H^T} R^{-1} \underline{\ell}' + \\ &\quad + \Sigma^{-H^T} (R + H\Sigma^{-H^T})^{-1} \underline{\ell}' - \Sigma^{-H^T} (R + H\Sigma^{-H^T})^{-1} Hx^- = \\ &= x^- - \Sigma^{-H^T} (H\Sigma^{-H^T} + R)^{-1} (Hx^- - \underline{\ell}'). \quad (4.10) \end{aligned}$$

Tämän lisäksi yhtälöistä 4.8 ja 4.9 saadaan

$$\Sigma^+ = \Sigma^- - \Sigma^{-H^T} (R + H\Sigma^{-H^T})^{-1} H\Sigma^-. \quad (4.11)$$

Yhtälöt 4.10 ja 4.11 ovat Kalmanin suotimen päivitysyhtälöt. Verrattuna yhtälöihin 4.7 ja 4.8 käännettävä matriisi on havaintosuureiden vektorin $\underline{\ell}'$ eikä tilavektorin \underline{x} kokoinen. Usein matriisin koko on jopa 1×1 eli se on pelkkä luku³. Nopea käänteismatriisien laskeminen helpottaa tosiaikaisia sovelluksia.

Edellisestä näkyy, että perättäinen tasoitus on sama kuin Kalmanin suodatus silloin, kun tilavektori on vakio. Tasoituksessa laskentamenetelmä on yleensä parametrinen, ja tasoituksessa käytetään havaintoyhtälöitä. Sen sijaan Kalmanin tapauksessa käytetään ehtoyhtälötasointusta.



4.6 Kalmanin suotimen käyttö "kahdesta päästä"

Ilmagravimetriassa, luku 12, Kalmanin suodinta voidaan käyttää havaintojen käsittelemiseen "lennossa", sitä mukaa kun niitä kerätään. Yleensä halutaan kuitenkin käyttää jälkikäsitteilyä, jotta raakahavainnoista saadaan mahdollisimman hyviä tuloksia. Tätä varten on tarjolla pienimmän neliösumman kollokaation tapaisia eräksittelyn menetelmiä.

Myös Kalmanin suodin voidaan valjastaa tähän. Havainnot käsitellään sekä eteen- että taaksepäin ajassa, ja sen jälkeen yhdistetään optimaalisesti molempien tulokset. Tämä voi olla eräksittelyn esivaihe. Tätä lähestymistapaa kuvataan seuraavaksi.

³... tai se on pelkistettävissä sellaiseksi, jos yhden epookin havainnot ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan. Silloin ne voidaan käsitellä muodollisesti peräkkäin eli erikseen.

**4.6.1 Havaintoyhtälöt ja normaaliyhtälöt**

Jos käytettävissä ovat havainnot $\underline{\ell}_k, k = 1, \dots, n$ ja dynaaminen malli on differentiaaliyhtälöryhmä

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}(t) \quad (4.12)$$

— tässä kirjoitettuna ei-stokastisena eli ilman dynaamista kohinaa \underline{n} — voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{x}(t_k) = \Phi_0^k \mathbf{x}(t_0),$$

jossa Φ_0^k on tilansiirtomatriisi, joka voidaan laskea. Näin havaintoyhtälöt voidaan kirjoittaa standardimuotoon

$$\underline{\ell}_k + \underline{v}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{H}_k \Phi_0^k \hat{\mathbf{x}}(t_0), \quad k = 1, \dots, n,$$

perinteinen havaintoyhtälöryhmä

$$\underline{\ell} + \underline{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}},$$

jossa rakennematriisi sekä havaintojen, jäännösvirheiden ja tuntemattomien vektorit ovat

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \Phi_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_k \Phi_0^k \\ \vdots \\ \mathbf{H}_n \Phi_0^n \end{bmatrix}, \quad \underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \vdots \\ \underline{\ell}_k \\ \vdots \\ \underline{\ell}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_k \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t_0) \end{bmatrix}.$$

Tästä näkyy, että pienimmän neliösumman ratkaisu voidaan saada ratkaisemalla tasoitustehtävä.

Voimme jakaa havainnot kahteen osaan, "ennen" (" $<$ ") tiettyä ajanhetkeä ja sen "jälkeen" (" $>$ "). Silloin havaintojen vektori, sen varianssimatriisi ja havaintoyhtälöiden rakennematriisi ovat

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell} \\ < \\ \underline{\ell} \\ > \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ < & \\ 0 & \mathbf{S} \\ > & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ < \\ \mathbf{A} \\ > \end{bmatrix}.$$

Näin muodostuvat erilliset normaaliyhtälöt:

$$\left(\mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \right)_{<} \hat{\mathbf{X}}_{<} = \mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \underline{\ell}_{<}, \quad \left(\mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \right)_{>} \hat{\mathbf{X}}_{>} = \mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \underline{\ell}_{>},$$

ratkaisuilla

$$\hat{\mathbf{X}}_{<} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \right)_{<}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \underline{\ell}_{<}, \quad \hat{\mathbf{X}}_{>} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \right)_{>}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{S}^{-1} \underline{\ell}_{>},$$



ja ratkaisujen varianssit erikseen

$$\underline{\Sigma} = \left(\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} \right)^{-1}, \quad \underline{\Sigma} = \left(\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} \right)^{-1}.$$

Toisaalta kokonaistasoituksen normaaliyhtälö on

$$\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} \hat{\underline{X}} = \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell}.$$

Oletamme havainnot $\underline{\ell}$ ja $\underline{\ell}$ tilastollisesti riippumattomiksi. Siksi \underline{S} on ositettu päälävistäjämatrisi ja saamme hajottaa normaaliyhtälön seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^T & \underline{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S} & 0 \\ 0 & \underline{S} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{A} \end{bmatrix} \hat{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \underline{A}^T & \underline{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S} & 0 \\ 0 & \underline{S} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\ell} \\ \underline{\ell} \end{bmatrix}$$

eli

$$\left(\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} \right) \hat{\underline{X}} = \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell} + \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell}.$$

Määritetään *painomatriisit*

$$\underline{P} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A}, \quad \underline{P} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A}, \quad (4.13)$$

ja normaaliyhtälöstä tulee

$$\left(\underline{P} + \underline{P} \right) \hat{\underline{X}} = \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell} + \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell}.$$

Ratkaisu on

$$\begin{aligned} \hat{\underline{X}} &= \left(\underline{P} + \underline{P} \right)^{-1} \left(\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell} + \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell} \right) = \\ &= \left(\underline{P} + \underline{P} \right)^{-1} \left(\underline{P} \underbrace{\left(\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} \right)^{-1} \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell}}_{\hat{\underline{X}}} + \underline{P} \underbrace{\left(\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} \right)^{-1} \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{\ell}}_{\hat{\underline{X}}} \right) = \\ &= \left(\underline{P} + \underline{P} \right)^{-1} \left(\underline{P} \hat{\underline{X}} + \underline{P} \hat{\underline{X}} \right), \end{aligned}$$

ja

$$\underline{\Sigma} = \left(\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} \right)^{-1} = \left(\underline{P} + \underline{P} \right)^{-1} = \left(\underline{\Sigma}^{-1} + \underline{\Sigma}^{-1} \right)^{-1}$$

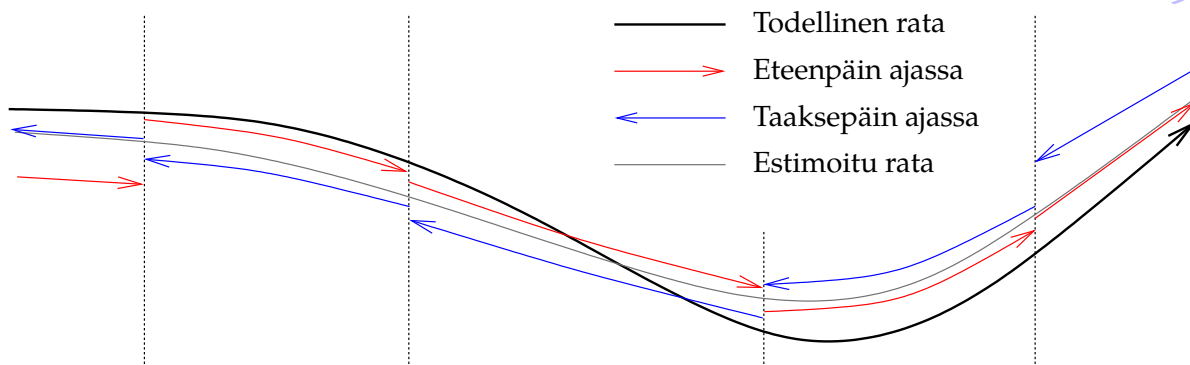
on kokonaistasoituksen ratkaisun varianssimatriisi.

Tämä näyttää, että erillisratkaisut " $<$ " ja " $>$ " voidaan "pinota" eli yhdistää kokonaisratkaisuksi:

$$\hat{\underline{X}} = \left(\underline{P} + \underline{P} \right)^{-1} \left(\underline{P} \hat{\underline{X}} + \underline{P} \hat{\underline{X}} \right), \quad \underline{\Sigma} = \left(\underline{P} + \underline{P} \right)^{-1}, \quad (4.14)$$

joka on toisin sanoen osaratkaisujen *painotettu keskiarvo*.





KUVA 4.1. Kalmanin suodin käytettynä ajassa eteen- ja taaksepäin.



4.6.2 Kalmanin suodin eteen- ja taaksepäin

Tärkeä tässä on, että osittaiset tehtävät — "ennen" (" $<$ ") ja "jälkeen" (" $>$ ") — voidaan ratkaista myös Kalmanin suotimen avulla! Eli voimme kaikille ajoille $t \in [t_0, t_n]$ laskea erikseen

- 1) Kalmanin suotimen ratkaisun alkuhetkestä t_0 eteenpäin integroimalla dynaamisen mallin ja päivittämällä tilavektorin ja sen varianssimatriisin käyttäen havaintoja $\ell_1, \dots, \ell_k, \dots, \ell_n$.
- 2) Kalmanin suotimen ratkaisun loppuhetkestä t_n taaksepäin ajassa integroimalla dynaamisen mallin ja päivittämällä tilavektorin ja varianssimatriisin käyttäen havaintoja $\ell_n, \dots, \ell_k, \dots, \ell_1$ käänteisessä järjestyksessä. Kalmanin suotimen yhtälö tähän on yhtälön 4.12 perusteella

$$\frac{d}{dt'} \tilde{x}(t') = -\tilde{F}(t') \tilde{x}(t'),$$

jossa $t' = -t$, $\tilde{x}(t') = x(t)$ ja $\tilde{F}(t') = F(t)$.

- 3) Kokonaisratkaisu syntyy yhdistämällä saadut osaratkaisut yllä olevien yhtälöiden 4.14 ja 4.13 avulla.

Näin voidaan hyödyntää Kalmanin menetelmän edut myös jälkilaskennassa. Ja huomaa, että yllä olevassa menetelmän johtamisessa käytetty yhtälö 4.12 ei sisällä dynaamista kohinaa \underline{n} . Todellisuudessa tätä rajoitusta ei ole: Kalmanin suotimen malliin *on* mahdollista sisällyttää dynaamista kohinaa. Integroidaan vain eteen- ja taaksepäin, lasketaan eteen- ja taaksetulosten painotettu keskiarvo koko aikavälillä ja saadaan kokonaisratkaisu. Tämä on merkittävä etu eräajoon verrattuna.



4.6.3 Esimerkki 4: satunnaiskulku kahteen suuntaan

Satunnaiskulkua kuvaa yhtälö 2.22:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{n}(t),$$

ja autokovarianssi on yhtälön 2.23 mukaan:

$$A_{x,0}(t, t) = Q_n \cdot (t - t_0).$$

Satunnaiskulkua havaitaan kahdella ajan hetkellä t_1 ja t_2 . Havaintoarvot ovat

$$\underline{\ell}_1 = \underline{x}(t_1), \quad \underline{\ell}_2 = \underline{x}(t_2),$$

ja molemmat on oletettu virheettömiksi.

Silloin eteenpäin-ratkaisu on

$$\hat{\underline{x}}_{<}(t) = \underline{\ell}_1, \quad \underline{\Sigma}_{<}(t) = Q_n \cdot (t - t_1), \quad (4.15)$$

ja taaksepäin-ratkaisu

$$\hat{\underline{x}}_{>}(t) = \underline{\ell}_2, \quad \underline{\Sigma}_{>}(t) = Q_n \cdot (t_2 - t). \quad (4.16)$$

Lasketaan eteen- ja taakse- ratkaisujen painotettu keskiarvo. Lähdetään yhtälöstä 4.14:

$$\hat{\underline{X}} = \left(\underline{P}_{<} + \underline{P}_{>} \right)^{-1} \left(\underline{P}_{<} \hat{\underline{X}}_{<} + \underline{P}_{>} \hat{\underline{X}}_{>} \right) = \left(\underline{P}_{<} + \underline{P}_{>} \right)^{-1} \underline{P}_{<} \hat{\underline{X}}_{<} + \left(\underline{P}_{<} + \underline{P}_{>} \right)^{-1} \underline{P}_{>} \hat{\underline{X}}_{>}$$

Kirjoita kertoimet uudelleen:

$$\begin{aligned} \left(\underline{P}_{<} + \underline{P}_{>} \right)^{-1} \underline{P}_{<} &= \left(\underline{\Sigma}_{<}^{-1} + \underline{\Sigma}_{>}^{-1} \right)^{-1} \underline{\Sigma}_{<}^{-1} = \\ &= \left(\underline{\Sigma}_{<} \left(\underline{\Sigma}_{<}^{-1} + \underline{\Sigma}_{>}^{-1} \right) \right)^{-1} = \left(\underline{I} + \underline{\Sigma}_{<} \underline{\Sigma}_{>}^{-1} \right)^{-1} = \underline{\Sigma}_{>} \left(\underline{\Sigma}_{>} + \underline{\Sigma}_{<} \right)^{-1} \end{aligned}$$

ja

$$\left(\underline{P}_{<} + \underline{P}_{>} \right)^{-1} \underline{P}_{>} = \underline{\Sigma}_{<} \left(\underline{\Sigma}_{>} + \underline{\Sigma}_{<} \right)^{-1}.$$

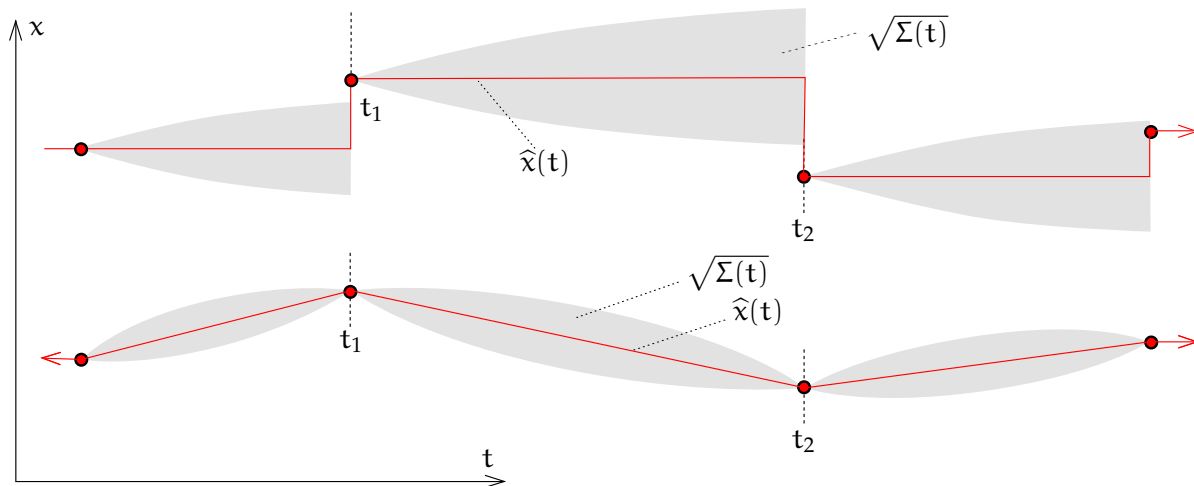
Siis

$$\hat{\underline{X}} = \underline{\Sigma}_{>} \left(\underline{\Sigma}_{>} + \underline{\Sigma}_{<} \right)^{-1} \hat{\underline{X}}_{<} + \underline{\Sigma}_{<} \left(\underline{\Sigma}_{>} + \underline{\Sigma}_{<} \right)^{-1} \hat{\underline{X}}_{>}$$

Yhden alkion tilavektorillemme:

$$\hat{x}(t) = \frac{\underline{\Sigma}_{>}(t)}{\underline{\Sigma}_{<}(t) + \underline{\Sigma}_{>}(t)} \hat{x}_{<}(t) + \frac{\underline{\Sigma}_{<}(t)}{\underline{\Sigma}_{<}(t) + \underline{\Sigma}_{>}(t)} \hat{x}_{>}(t).$$





KUVA 4.2. Satunnaiskulku: ratkaisu ja epävarmuus. Ylhäällä ratkaisu eteenpäin ajassa, alhaalla yhdistynyt ratkaisu kahteen suuntaan. Janoja alemmassa kuvaajassa kutsutaan "Brownin silloiksi" (Wikipedia, [Brownian bridge](#)).

Sijoitetaan varianssit 4.15 ja 4.16:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \frac{Q_n \cdot (t_2 - t)}{Q_n \cdot (t - t_1) + Q_n \cdot (t_2 - t)} \hat{x}(t) + \\ &\quad + \frac{Q_n \cdot (t - t_1)}{Q_n \cdot (t - t_1) + Q_n \cdot (t_2 - t)} \hat{x}(t) = \\ &= \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \hat{x}(t) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \hat{x}(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \ell_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \ell_2,\end{aligned}$$

lineaarinen interpolointi havaintopookkien välillä. Ja varianssi on

$$\begin{aligned}\Sigma(t) &= \left(\Sigma_{<}^{-1}(t) + \Sigma_{>}^{-1}(t) \right)^{-1} = \\ &= Q_n \cdot \left(\frac{1}{t - t_1} + \frac{1}{t_2 - t} \right)^{-1} = Q_n \frac{(t - t_1)(t_2 - t)}{t_2 - t_1},\end{aligned}$$

neliöllinen ilmaisu, joka saavuttaa arvon nolla molemmissa päissä ja maksimiarvon $\frac{1}{4}Q_n$ keskellä. Keskihajonta on tämän neliöjuuri, suurimmillaan $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{Q_n}$ keskellä. Katso kuva 4.2.

4.6.4 Esimerkki 5: vakion estimointi

Olkoon x tuntematon vakio, joka estimoidaan. Se on havaittu hetkellä 1, jolloin havaintoarvo on 7 ja keskivirhe ± 2 , ja hetkellä 2, jolloin havaintoarvo on 5 ja keskivirhe ± 1 .

Kysymys Muodosta tavallisen tasoitustehtävän havaintoyhtälöt ja havaintovektorin varianssimatriisi. Laske \hat{x} .



Vastaus

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A \hat{x},$$

jossa havaintovektori, sen varianssimatriisi ja rakennematriisi ovat

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (A^T S^{-1} A)^{-1} A^T S^{-1} \underline{\ell} = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{27}{5} = 5,4. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ratkaisun varianssimatriisi:

$$\Sigma = (A^T S^{-1} A)^{-1} = \frac{4}{5} = 0,8. \quad (4.18)$$

Kysymys Kirjoita Kalmanin suotimen dynaamiset yhtälöt. Muista, että x on vakio.

Vastaus Yleinen dynaaminen yhtälö diskreetissä tapauksessa on

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \Phi_k^{k+1} \underline{x}(t_k) + \underline{w}_k^{k+1}$$

jossa $\Phi_k^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, 1×1 -kokoinen yksikkömatriisi, ja $\underline{w}_k^{k+1} = 0$: deterministinen liike, ei ole dynaamista kohinaa. Siis

$$x(t_{k+1}) = x(t_k).$$

Vaihtoehtoisesti kirjoitetaan differentiaaliyhtälö:

$$\frac{dx}{dt} = Fx + \underline{n}.$$

Tässä tapauksessa $F = 0$ eikä dynaamista kohinaa ole eli $\underline{n} = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Kysymys Kirjoita Kalmanin suotimen päivitysyhtälöt niin, että yläindeksi "−" merkitsee *a priori* ja "+" *a posteriori*:

$$x_k^+ = x_k^- - K_k (H_k x_k^- - \ell_k), \quad \Sigma_k^+ = (I - K_k H_k) \Sigma_k^-,$$

jossa vahvistusmatriisi on

$$K_k = \Sigma_k^- H_k^T (R_k + H_k^T \Sigma_k^- H_k)^{-1}.$$

Minkä näköisiä ovat tässä tapauksessa matriisit H ja K ?



Vastaus Koska tässä tapauksessa havainto $\underline{\ell}_k = x_k + \underline{m}$ — tila havaitaan suoraan — on $H_k = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, 1×1 -kokoinen matriisi, jonka ainoa alkio on 1.

$$K_k = \frac{\Sigma_k^-}{R_k + \Sigma_k^-}.$$

Jos alkuperäinen Σ_k^- on suuri, on $K \sim 1$.

$$\begin{aligned} x_k^+ &= x_k^- - \frac{\Sigma_k^-}{R_k + \Sigma_k^-} (x_k^- - \underline{\ell}_k) = \\ &= \underbrace{\frac{\Sigma_k^-}{R_k + \Sigma_k^-}}_{w_k} \underline{\ell}_k + \underbrace{\frac{R_k}{R_k + \Sigma_k^-}}_{W_k} x_k^- = \frac{\Sigma_k^- \underline{\ell}_k + R_k x_k^-}{R_k + \Sigma_k^-}, \\ \Sigma_k^+ &= (1 - K_k) \Sigma_k^- = \frac{R_k}{R_k + \Sigma_k^-} \Sigma_k^-. \end{aligned}$$

- *A posteriori* tila x_k^+ on *a priori* tilan x_k^- ja havainnon $\underline{\ell}_k$ painotettu keskiarvo painoilla W_k ja w_k .
- Mitä huonompi on *a priori* tilan varianssi Σ_k^- havaintotarkkuuteen R_k verrattuna, sitä enemmän päivitetty tilavarianssi Σ_k^+ tuo parannusta.

Kysymys Laske manuaalisesti läpi molemmat havaintotapahtumat ja anna sen jälkeinen tila-arvio x_2^+ ja sen varianssimatriisi Σ_2^+ . Tilan alkuarvo x_1^- on 0 ja sen varianssimatriisin — siis varianssin — alkuarvoksi laitetaan "numeerisesti ääretön":

$$\Sigma_1^- = 100.$$

Vastaus Ensimmäinen askel:

$$K_1 = \frac{\Sigma_1^-}{R_1 + \Sigma_1^-} = \frac{100}{4 + 100} = \frac{100}{104}.$$

Siis

$$\begin{aligned} x_1^+ &= x_1^- - K_1 (x_1^- - \ell_1) = 0 - \frac{100}{104} (0 - 7) = 6,73 = x_2^-, \\ \Sigma_1^+ &= (I - K_1) \Sigma_1^- = \left(1 - \frac{100}{104}\right) 100 = \frac{400}{104} = 3,85 = \Sigma_2^-. \end{aligned}$$

Toinen askel:

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{\Sigma_2^-}{R_2 + \Sigma_2^-} = \frac{3,85}{1 + 3,85} = 0,79. \\ x_2^+ &= x_2^- - K_2 (x_2^- - \ell_2) = 6,73 - 0,79 (6,73 - 5) = \\ &= 6,73 - 0,79 \cdot 1,73 = 5,36. \\ \Sigma_2^+ &= (I - K_2) \Sigma_2^- = (1 - 0,79) \cdot 3,85 = 0,81. \end{aligned}$$

Nämä ovat lähellä tasoituksen tuloksia 4.17 ja 4.18.





Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Lisää yllä olevassa esimerkissä 4.1 fysikaaliset yksiköt suureille \underline{x} , \underline{v} , \underline{n} , Q , Σ , Φ_0^5 , $\underline{\ell}$, H , R , S ja K .
- 2) Montako alkioita on tilavektorilla, kun kuvataan pistemäisen kohteen liikettä avaruudessa?
- 3) Ja montako alkioita on, jos kohde on laajempi, jäykkä kappale, esimerkiksi lentokone?
- 4) Mitä dynaaminen kohina kuvaa?
- 5) Mitä havaintokohina kuvaa?
- 6) Mikä on vakion k dimensio yllä olevassa laskuvarjohyppääjän ongelmassa?
 - (a) aika^{-1}
 - (b) $\frac{\text{massa}}{\text{pituus}^3 \text{ aika}}$
 - (c) $\frac{\text{pituus}^3}{\text{massa aika}}$
 - (d) $\frac{\text{massa}}{\text{aika}}$



Harjoitus 4 – 1: Yksinkertainen Kalmanin suotimen esimerkki

- 1) Oleta seuraava dynaaminen malli yhden alkion tilavektorille \underline{x} :

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = 0 + \underline{n}(t),$$

jossa $\underline{n}(t)$ on valkoinen kohina, jonka autokovarianssi on $Q_n = 1 \text{ m}^2/\text{s}$. Alkutilan estimaatti on $\hat{\underline{x}}(0) = 0 \text{ m}$ ja *a priori* tilavarianssi $\Sigma(0) = 100 \text{ m}^2$. Laske tilaestimaatti epookille $t = 3 \text{ s}$, siis $\underline{x}^-(3)$ ja $\Sigma^-(3)$.

- 2) Epookilla $t = 3 \text{ s}$ havaitaan \underline{x} : havaintoyhtälö on

$$\underline{\ell} = \underline{x}(3) + \underline{m},$$

jossa \underline{m} on havainnon satunnainen virhe eli kohina, jonka varianssi R on annettuna⁴. Havainnon arvo on $\underline{\ell} = 10 \text{ m}$. Laske

- (a) Kalmanin vahvistusmatriisi K
- (b) *a posteriori* tilaestimaatti $\underline{x}^+(3)$ ja sen varianssi $\Sigma^+(3)$.

⁴Varianssiksi voi ottaa syntymäpäiväsi päivän numero kuukauden sisällä!

**Harjoitus 4 – 2: Hieman monimutkaisempi Kalmanin suotimen esimerkki**

Oleta nyt, että dynaaminen malli on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix},$$

jossa valkoisen kohinan prosessin \underline{n} autokovarianssi on $50 \text{ m}^2/\text{s}^3$, toisin sanoen

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 50 \text{ m}^2/\text{s}^3 \end{bmatrix}.$$

Annettuna on alkuhetken tilaestimaatti $\hat{\underline{x}}(0) = \hat{\underline{v}}(0) = 0$ ja sen varianssimatriisi

$$\Sigma(0) = \begin{bmatrix} 100 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 100 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{bmatrix}.$$

- 1) Laske tilansiirtomatriisi Φ_0^3 .
- 2) Laske tilakohinan varianssi θ_0^3 .
- 3) Laske *a priori* tilan estimaatti

$$\underline{x}^-(3), \underline{v}^-(3), \Sigma^-(3)$$

epookilla $t = 3 \text{ s}$. Huomaa, että nyt $\underline{x}^-(3)$ ja $\underline{v}^-(3)$ ovat korreloituneet.

- 4) Havaintoyhtälö on taas

$$\underline{\ell} = \underline{x}(3) + \underline{m}.$$

Jos $\underline{\ell} = 10 \text{ m}$, laske

- (a) Kalmanin vahvistusmatriisi K
- (b) *a posteriori* tilavarianssi $\Sigma^+(3)$.

Laske mielenkiinnon vuoksi varianssimatriisien $\Sigma(0)$, $\Sigma^-(3)$ ja $\Sigma^+(3)$ determinantit. Tämän determinantin neliöjuuri kerrottuna luvulla π on virhe-ellipsin pinta-ala ja samalla järkevä tilavektorin epävarmuuden yleinen mitta.

Oleta R samanarvoiseksi kuin edellisessä tehtävässä tai pidä se symbolina.

**Harjoitus 4 – 3: Laskuvarjohyppääjä uudelleen**

Oleta esimerkissä 4.3, että ilmanvastus on verrannollinen putoamisnopeuden *neliöön*. Johda uudelleen ja linearisoi dynaaminen malli.





Inertianavigointi

5



5.1 Periaate

Inertianavigointi perustuu Isaac Newtonin¹ ensimmäiseen liikelakiin, jota kutsutaan myös nimellä liikkeen jatkuvuuden laki eli *inertialaki*:

Kappale jatkaa tasaista suoraviivaista liikettä vakionopeudella tai pysyy levossa, jos siihen ei vaikuta ulkoisia voimia.

Tämä johtaa ajatukseen, että kulkuneuvon liike olisi mahdollista rekonstruoida alkutilasta — sijainti ja nopeus — vain mittaamalla jatkuvasti kaikkia kulkuneuvoon kohdistuvia voimia, ilman ulkopuolisten kohteiden tai signaalien käyttöä. Juuri näin inertianavigointi toimii.

Hyvä oppikirja inertianavigoinnista ja sen käytöstä geodesiassa on [Jekeli \(2001\)](#).

Esitetään ensin, miten inertianavigointi tapahtuu inertiaalisessa eli vapaasti putoavassa koordinaatistossa vapaassa avaruudessa, eli ihanne-tilanteessa ilman paikallisia vetovoiman lähteitä. Inertianavigointia Maan painovoimakentässä käsitellään myöhemmin.

Inertianavigoinnissa mitataan jatkuvasti seuraavia suureita:

- 1) Kulkuneuvon kolmiulotteinen *kiihtyvyys*,

$$\mathbf{a}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \mathbf{k},$$

tai abstraktina koordinaattien vektorina

$$\mathbf{a}_\beta(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}_\beta(t) = \left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \quad \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right]^T.$$

¹Sir Isaac Newton [PRS](#) (1642–1727) oli englantilainen yleisnero, joka matematisoi liikkeen fysiikan, tähtitieteen ja suuren osan geofysiikkaa.

Tässä

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$$

on kappaleen kolmiulotteinen sijainti ja

$$\mathbf{x}_\beta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}^T$$

on sen koordinaattien abstrakti vektori ortonormaalilla kannalla $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

2) Kulkuneuvon *asento*:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_3(\alpha_3) \mathbf{R}_2(\alpha_2) \mathbf{R}_1(\alpha_1) = \\ &= \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_2 c_3 & c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 \\ -c_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 \\ s_2 & -s_1 c_2 & c_1 c_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa $c_i \stackrel{\text{def}}{=} \cos \alpha_i$, $s_i \stackrel{\text{def}}{=} \sin \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$.

Asentoa kuvaa *kolme tunteimatonta*, $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, eli *Eulerin kulmaa*, jotka ovat ajan funktioita ja muuttuvat kulkuneuvon liikkeen mukana.

Ennen matkan alkamista matriisi $\mathbf{R}(t_0)$, tai vastaavasti asentokulmat $\alpha_i(t_0)$, $i = 1, 2, 3$, on määritettävä riittävällä tarkkuudella. Matkan aikana asennon muutokset eli kulmanopeudet $\frac{d}{dt} \alpha_i$ mitataan kolmen *gyroskoopin* avulla ja integroidaan ajassa, jotta saadaan hetkellinen asento $\alpha_i(t)$ ja näin ollen matriisi $\mathbf{R}(t)$.

Yhteensä jatkuvasti mitataan *kuutta parametria*: kolmea kulmanopeutta ja kolmea lineaarista kiihtyvyyttä.

Kolmella kiihtyvyyksimittarilla mitattu *kiihtyvyys* on kulkuneuvon aksleilla $\beta' \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ kirjoitettuna:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\beta'}(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{a}_\beta(t),$$

jossa tilde eli aaltoviiva merkitsee mitattua suuretta.

Inertialaitteen laskentayksikkö *integroi* nyt kiihtyvyydet $\tilde{\mathbf{a}}$ muunnoksen

$$\mathbf{a}_\beta(t) = \mathbf{R}^{-1}(t) \tilde{\mathbf{a}}_{\beta'}(t) = \mathbf{R}^T(t) \tilde{\mathbf{a}}_{\beta'}(t)$$



jälkeen kolmessa ulottuvuudessa, *kaksi kertaa peräkkäin*. Ensimmäinen integrointi antaa kulkuneuvon *nopeusvektorin*, toinen sen *paikan*.

Seuraavasti, inertiaalisissa koordinaateissa β :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\beta(t) &= \mathbf{v}_\beta(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}_\beta(\tau) d\tau, \\ \mathbf{x}_\beta(t) &= \mathbf{x}_\beta(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_\beta(\tau) d\tau,\end{aligned}\tag{5.1}$$

jossa $\mathbf{x}_\beta(t_0)$ ja $\mathbf{v}_\beta(t_0)$ ovat *integrointi-alkioita*. Ne voivat edustaa esimerkiksi laukaisupaikan sijaintia ja tietoa, että avaruusalus seisoo liikkumatta laukaisualustalla.

Kuten yhtälöstä 5.1 näkyy, paikan $\mathbf{x}(t)$ tarkkuus huononee ajan kuluessa, koska sekä kiihtyvyyden $\tilde{\mathbf{a}}(\tau)$ mittausta että kiertomatriisin \mathbf{R} määrittäminen ovat epätarkkoja: niiden sisältämä virhe kasautuu integroitaessa. Kasautuminen tapahtuu peräti kaksi kertaa päällekkäin, koska meillä on kaksi peräkkäistä integrointia.

Suosittu temppu maanpinnan inertianavigoinnin tarkkuuden säilyttämiseksi on *pysähtyä* säännöllisesti eli suorittaa ”nollanopeuspäivitys”. Silloin $\mathbf{v}(t_1) = 0$ jollekin ajan hetkelle $t_1 > t_0$ ja ensimmäinen integraali eli nopeusintegraali alkaa uudelleen tunnetusta lähtöarvosta.



5.2 Inertialaitteen osat

Inertialaite eli **IMU**, inertiamittausyksikkö, sisältää seuraavia mittaavia osia:

- 1) gyroskoopit
- 2) kiihtyvyydsmittarit.

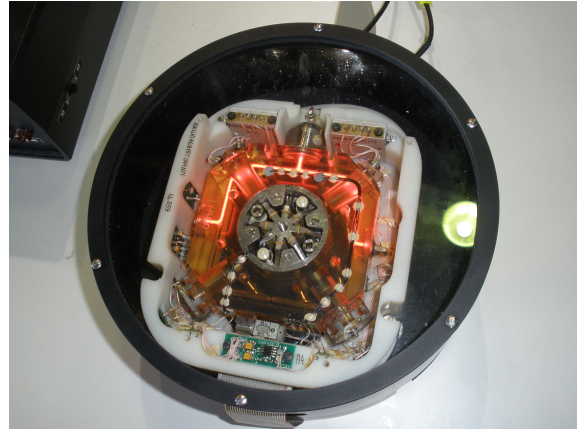
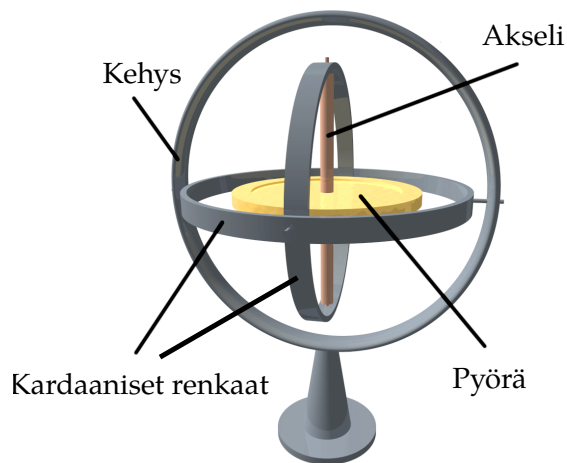


5.2.1 Gyroskooppi

Gyroskooppi on nopeasti pyörivä vauhtipyörä, jonka inertia tekee sen pyörimisakselin suunnan muuttamisen vaikeaksi.

Nimen ”gyroskooppi” keksi Léon Foucault². Hän rakensi gyroskoopin onnistuneesti osoittaakseen maapallon pyörimisen, sen jälkeen kun oli onnistuneesti tehnyt saman hänen nimeään kantavalla heilurilla. Nimi tulee kreikan kielestä ja viittaa kirjaimellisesti maapallon pyörähdysliikkeen näkemiseen (Sommeria, 2017).

²Jean Bernard Léon Foucault (1819–1886) oli ranskalainen fyysikko, joka tunnetaan parhaiten Maan pyörähdysliikettä koskevista empiirisistä tutkimuksistaan.



KUVA 5.1. Vasemmalla gyroskooppi. [Wikimedia Commons, Gyroscope](#). Nap-sauta animaatiota varten. Oikealla ilmailussa käytetty rengaslaser-gyroskooppi. [Nockson \(2011\)](#).



Pyörivän kappaleen liikettä kuvaa inertiaalisessa koordinaatistossa seuraava yhtälö³:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \left(\frac{d}{dt} J \right) \vec{\omega}, \quad (5.2)$$

jossa

\mathbf{N} vääntömomentti (engl. *torque*)

$\mathbf{L} = J \vec{\omega}$ pyörähdysmomentti (*angular momentum*)

$\vec{\omega}$ pyörähdysnopeus (*angular velocity*)

J hitaustensori, komponentteittain (x, y, z) -koordinaatiston kannalla β :

$$J_{\beta} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix},$$

_____ 3×3 -kokoinen matriisi.

Kappaleen hitaustensorin J komponenttimatriisi J_{β} on symmetrinen ja

³Yhtälö muistuttaa Newtonin toista liikelakia:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

jossa \mathbf{F} on (lineaarinen) voima ja \mathbf{v} (lineaarinen) nopeus. $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ on *impulssi* eli (lineaarinen) liikemäärä. m , massa, vastaa hitaustensoriin J , mutta on skalaari. Newtonin liiketeoriassa se on vakio.



positiivisesti definiitti. Sen alkiot ovat seuraavat integraalit:

$$J_{xx} = \iiint \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$J_{yy} = \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$J_{zz} = \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

$$J_{xy} = - \iiint \rho(x, y, z) xy dx dy dz,$$

$$J_{xz} = - \iiint \rho(x, y, z) xz dx dy dz,$$

$$J_{yz} = - \iiint \rho(x, y, z) yz dx dy dz,$$

jossa ρ on aineitiheys. Siis

$$J_{\beta} = \iiint \rho(x, y, z) \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dx dy dz.$$

Ilmeisesti tulos riippuu koordinaatiston (x, y, z) valinnasta. *Origo* vaikuttaa suuresti: kun valitsee origon kaukana kappaleen ulkopuolelta, voi tehdä matriisin J_{β} alkioista mielivaltaisen suuria! Siksi kun puhutaan hitaustensorista kappaleen ominaisuutena, valitaan aina origoksi kappaleen massakeskipiste:

$$\mathbf{x}_{\text{mkp}} = \iiint \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV$$

eli

$$x_{\text{mkp}} = \iiint \rho(x, y, z) x dx dy dz,$$

$$y_{\text{mkp}} = \iiint \rho(x, y, z) y dx dy dz,$$

$$z_{\text{mkp}} = \iiint \rho(x, y, z) z dx dy dz,$$

jonka jälkeen käytetään J :n laskennassa

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{mkp}}.$$

Akseleiden *suunnista* puheen ollen, koordinaatiston kierron kautta voidaan aina saada symmetrinen tensori *pääakseleille*. Silloin inertia-tensorista tulee päälävistäjämatrissi

$$J_{\beta'} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$



Alkioita J_x, J_y ja J_z kutsutaan *hitausmomenteiksi*. Ne ovat itse asiassa tensorin J ominaisarvot.

Mitä nopeammin gyroskooppi pyörii, eli mitä suurempi on pyörähdysnopeusvektori $\vec{\omega}$ ja siten pyörähdysmomentti \mathbf{L} , sitä enemmän vääntömomenttia \mathbf{N} tarvitaan gyroskoopin pyörimisakselin kääntämiseksi.

Yhtälö 5.2 pätee *inertiaalisessa* koordinaatistossa: Ei-inertiaalisessa koordinaatistossa tunnettu vektorin aikaderivaatan yhtälö antaa vektorin \mathbf{L} tapauksessa

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}\mathbf{L} + \langle \vec{\omega}^{\boxplus} \times \mathbf{L} \rangle = J \frac{d}{dt}\vec{\omega} + \left(\frac{d}{dt}J \right) \vec{\omega} + \langle \vec{\omega}^{\boxplus} \times J\vec{\omega} \rangle. \quad (5.4)$$

Symboli \times on ulkoinen tulo eli vektoritulo. Vektori $\vec{\omega}^{\boxplus}$ on ei-inertiaalisen koordinaatiston pyörähdysnopeus, joka voi olla erilainen kuin itse kappaleen pyörähdysnopeus $\vec{\omega}$.

Ei-inertiaalisessa koordinaatistossa, jossa J on pääakseleilla ja *vakio* eikä riipu ajasta⁴, pätee yhtälön 5.4 perusteella:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{d}{dt}L_x = J_x \frac{d}{dt}\omega_x + \omega_y^{\boxplus} J_z \omega_z - \omega_z^{\boxplus} J_y \omega_y, \\ N_y &= \frac{d}{dt}L_y = J_y \frac{d}{dt}\omega_y + \omega_z^{\boxplus} J_x \omega_x - \omega_x^{\boxplus} J_z \omega_z, \\ N_z &= \frac{d}{dt}L_z = J_z \frac{d}{dt}\omega_z + \omega_x^{\boxplus} J_y \omega_y - \omega_y^{\boxplus} J_x \omega_x. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Vektori $\vec{\omega}^{\boxplus}$ on koordinaatiston pyörähdysnopeus. Huomaa, että J on jo vakio, jos koordinaatisto on kiinnitetty vain kappaleen *muotoon* eikä itse kappaleeseen. Esimerkiksi pyörähdysymmetrisen gyroskoopin roottorin tapauksessa x - ja y -akselien ei tarvitse pyöriä roottorin kanssa, kunhan z -akseli on samansuuntainen pyörimisakselin kanssa. Silloin $\omega_x^{\boxplus} = \omega_x$, $\omega_y^{\boxplus} = \omega_y$ ja $\omega_z^{\boxplus} = 0$.

Jos $\omega_z^{\boxplus} = \omega_z$, on $\vec{\omega}^{\boxplus} = \vec{\omega}$ ja saadaan Eulerin yhtälöiden klassinen muoto mukana pyörivissä kappalekoordinaateissa:

$$\begin{aligned} N_x &= J_x \frac{d}{dt}\omega_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z, \\ N_y &= J_y \frac{d}{dt}\omega_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x, \\ N_z &= J_z \frac{d}{dt}\omega_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \quad (5.6)$$

⁴Oletus, että sellainen koordinaatisto on olemassa on luonnollinen vauhtipyörän, muttei esimerkiksi koko maapallon tapauksessa, koska maapallon muoto muuttuu jatkuvasti.



Nämä yhtälöt pätevät vapaasti pyörivälle kappaleelle, esimerkiksi Maalle avaruudessa⁵.

Hyvän gyroskoopin rakentaminen on haastava insinööritaidonnäyte. Gyroskooppi koostuu roottorista ja akselistä, joka on laakeroitu molemmissa päissä pyörää ympäröivässä kehikossa eli pöydässä. Kehikko voi koostua useista renkaista ja akseleista, niin sanotusta *kardaanisesta* järjestelmästä.

Olkoon pyörimisakseli z -akseli. Jos pyörimisakselin suunta on vakio ulkoisessa inertiaalisessa koordinaatistossa,

$$\omega_x^{\oplus} = \omega_y^{\oplus} = 0,$$

ja voidaan valita $\omega_z^{\oplus} = 0$. Silloin yhtälöistä 5.5 seuraa, että

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{d}{dt} L_x = J_x \frac{d}{dt} \omega_x, \\ N_y &= \frac{d}{dt} L_y = J_y \frac{d}{dt} \omega_y, \\ N_z &= \frac{d}{dt} L_z = J_z \frac{d}{dt} \omega_z. \end{aligned}$$

Jos $\omega_x^{\oplus} = \omega_y^{\oplus} = 0$, myös $\omega_x = \omega_y = 0$ ja

$$\frac{d}{dt} \omega_x = \frac{d}{dt} \omega_y = 0.$$

Jos lisäksi roottorin pyörähdysnopeus on vakio eli

$$\frac{d}{dt} \omega_z = 0,$$

⁵Jos yhtälöissä 5.6 nollataan vääntömomentti $\mathbf{N} = 0$, ensimmäisestä kahdesta yhtälöstä saadaan, olettaen $\Delta J = J_z - J_x = J_z - J_y$ pyörähdyssymmetriselle kappaleelle,

$$J_x \frac{d}{dt} \omega_x = -\Delta J \omega_y \omega_z, \quad J_y \frac{d}{dt} \omega_y = \Delta J \omega_z \omega_x,$$

ja käyttäen $C = \Delta J \omega_z / J_x = \Delta J \omega_z / J_y \stackrel{\text{def}}{=} \Delta J \omega_z / J_0$:

$$\frac{d}{dt} \omega_x = -C \omega_y, \quad \frac{d}{dt} \omega_y = C \omega_x,$$

joka antaa ristisijoituksella toisen kertaluvun yhtälöt

$$\frac{d^2}{dt^2} \omega_x = -C^2 \omega_x, \quad \frac{d^2}{dt^2} \omega_y = -C^2 \omega_y,$$

joilla molemmilla on jaksollisia ratkaisuja jaksolla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{C^2}} = 2\pi \frac{J_0}{\Delta J \omega_z} = \frac{J_0}{\Delta J} \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{J_0}{\Delta J} \text{ tähtivuorokautta.}$$

Tässä oletettiin, että $J_x = J_y \stackrel{\text{def}}{=} J_0$. Näin olemme löytäneet Eulerin maapallon vapaan nutaation, joka on napaliikkeen yksi komponentti.



seuraa, että

$$N_x = \frac{d}{dt}L_x = 0, \quad N_y = \frac{d}{dt}L_y = 0, \quad N_z = \frac{d}{dt}L_z = 0.$$

Tässä tapauksessa gyroskooppiin ei siis kohdistu vääntöjä.

Ja koska tässä koordinaatistossa hitaustensori J on pääakseleilla, yhtälö 5.3, ja

$$\vec{\omega} = \omega_z \mathbf{k} \implies \omega \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{\omega}\| = \omega_z,$$

seuraa, että

$$\mathbf{L} = J\vec{\omega} = J_z\omega_z\mathbf{k} = J_z\omega\mathbf{k} \implies L \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{L}\| = L_z = J_z\omega_z = J_z\omega. \quad (5.7)$$

Siis molemmat vektorit, pyörimisnopeusvektori $\vec{\omega}$, suuruus ω , ja pyörähdysmomentti \mathbf{L} , suuruus L , ovat aina samansuuntaisia gyroskoopin fysikaalisen pyörimisakselin ja toistensa kanssa. Tämä pitää edelleen likimäärin paikkansa, jos gyroskoopin pyörimisakseli kääntyy vain hitaasti.

Tutkitaan gyroskoopin käyttäytymistä pyörähdysmomentin \mathbf{L} säilymisen periaatteella, kun \mathbf{L} on linjassa pyörimisakselin kanssa. Ainoa tapa saada gyroskoopin pyörimisakseli kääntymään on kohdistaa siihen vääntöä. Vääntömomentin N_x kohdistaminen x -akselin ympäri muuttaa pyörähdysmomenttia sen akselin ympäri määrällä

$$\frac{d}{dt}L_x = N_x.$$

Koska kokonaispyörähdysmomentti on $L = J_z\omega$ ja se osoittaa aina gyroskoopin pyörimisakselin suuntaan, seuraa että pyörimisakselin suunnan muutoksen on oltava⁶

$$\omega_y^{\oplus} = \frac{d}{dt}\theta_y = \frac{\frac{d}{dt}L_x}{L} = \frac{N_x}{J_z\omega}.$$

⁶Tämä saadaan myös ensimmäisestä yhtälöstä 5.5:

$$\frac{d}{dt}L_x = J_x \frac{d}{dt}\omega_x + \omega_y^{\oplus} J_z \omega_z - \omega_z^{\oplus} J_y \omega_y = \omega_y^{\oplus} L,$$

asettamalla

$$\frac{d}{dt}\omega_x \approx 0$$

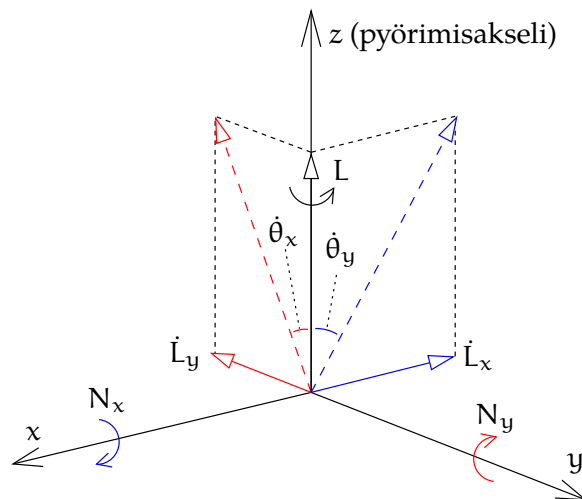
(tasainen kääntyminen) ja

$$J_z\omega_z = J_z\omega = L, \quad \omega_z^{\oplus} = 0.$$

Sama pätee toiselle yhtälölle ja ω_x^{\oplus} :

$$\frac{d}{dt}L_y = J_y \frac{d}{dt}\omega_y + \omega_x^{\oplus} J_x \omega_x - \omega_x^{\oplus} J_z \omega_z = -\omega_x^{\oplus} L.$$





KUVA 5.2. Kuinka vääntö aiheuttaa pyörimisakselin prekessiota. Huomaa korkkiruuvisääntö: $N_x, N_y, \dot{L}_x, \dot{L}_y$ ja $\dot{\theta}_y$ ovat negatiivisia ja L ja $\dot{\theta}_x$ ovat positiivisia.

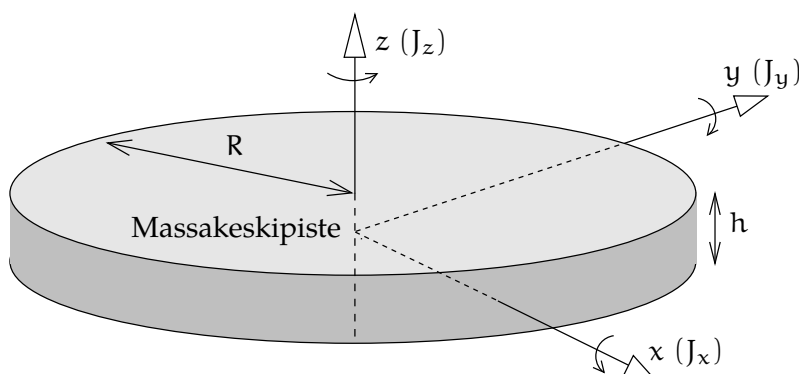
Samalla tavalla

$$\omega_x^{\oplus} = \frac{d}{dt}\theta_x = -\frac{\frac{d}{dt}L_y}{L} = -\frac{N_y}{J_z\omega}.$$

Siis vääntömomentti N_x x-akselin ympäri aiheuttaa pyörimisakselin kääntämisen eli *prekession* y-akselin ympäri. Vääntömomentti N_y y-akselin ympäri aiheuttaa pyörimisakselin kääntämisen x-akselin ympäri. Katso kuva 5.2.

Tavanomaisesti määritellään kolme keskenään kohtisuoraa akselia: syöttöakseli, jonka ympäri kohdistuu vääntöä, gyroskoopin pyörimisakseli ja lähtöakseli, jonka ympäri tapahtuu prekessiota.

Lieriön, jonka säde on R , kuva 5.3, hitausmomentti sen akselin ympäri



KUVA 5.3. Gyroskoopin roottori ja sen hitausmomentit.

on

$$\begin{aligned}
 J_z &= \int_0^h \iint_{\text{ympyrälevy}} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \\
 &= \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot r dr d\theta dz = \\
 &= \rho \underbrace{\int_0^h dz}_h \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^R r^2 \cdot r dr}_{\frac{1}{4}R^4} = \frac{1}{2} (\rho \cdot \pi R^2 \cdot h) R^2 = \frac{1}{2} MR^2,
 \end{aligned}$$

jossa $r^2 = x^2 + y^2$ ja $M = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$ on kokonaismassa.

Litteälle lieriölle (h , ja siis z , on pieni) voimme myös laskea määritelmällä $Y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{R^2 - x^2}$:

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \int_{-R}^{+R} \int_{-Y(x)}^{+Y(x)} \rho (y^2 + z^2) dy dx dz \approx \\
 &\approx \rho \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \int_{-R}^{+R} \int_{-Y(x)}^{+Y(x)} y^2 dy dx dz = \\
 &= \rho \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \sin \theta)^2 r dr d\theta dz = \\
 &= \rho \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} dz}_h \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} \underbrace{\int_0^R r^2 r dr}_{\frac{1}{4}R^4} = \frac{1}{4} (\rho \cdot \pi R^2 \cdot h) R^2 = \frac{1}{4} MR^2.
 \end{aligned}$$

Molemmissa vaihdettiin integroinnin koordinaatit (x, y) napakoordinaateiksi (θ, r) : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dx dy = r dr$.

Samalla tavalla tietenkin $J_y = J_x = \frac{1}{4} MR^2 = \frac{1}{2} J_z$.



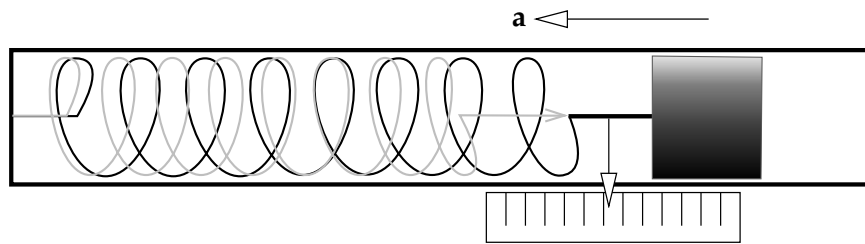
5.2.2 Kiihtyvyyssmittari

Alkeellinen kiihtyvyyssmittari voidaan rakentaa yhdistämällä jousi, asteikko ja koemassa. Jousen venytys on verrannollinen koemassaan ja kiihtyvyyteen, ja venytys voidaan lukea asteikolta.

Automaattinen lukeminen on mahdollista esimerkiksi kapasitiivisesti tai pietsosähköisen anturin avulla. Itse asiassa mikroelektroninen kiihtyvyyssanturi (eräs MEMS-anturi eli mikroelektroninen liikeanturi) toimii juuri tällä tavoin.

Kiihtyvyyssmittarit kiinnitetään samaan kehikkoon, mihin myös gyroskoopit on kiinnitetty. Mittausakselit asetetaan mahdollisimman samansuuntaisiksi.





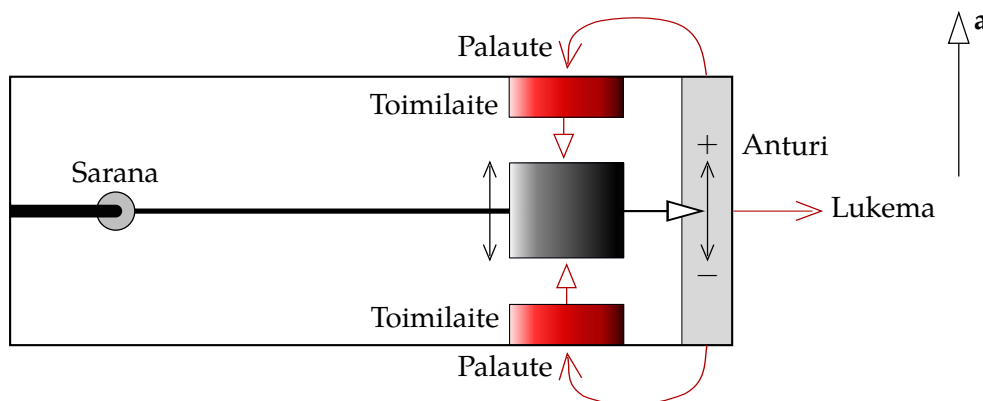
KUVA 5.4. Jousikiihtyvyyssmittarin periaate.

Nykyiset kiihtyvyyssmittarit voivat olla hyvin herkkiä, esimerkiksi $10 \text{ ppm} \approx 10 \text{ mGal}$ ⁷. Halutut ominaisuudet ovat herkkyyden lisäksi *lineaarisuus* ja hyvä käyttäytyminen silloin, kun *kiihtyvyys vaihtelee runsaasti* tai syntyy *värähtelyä* (raketin laukaisu!).

Anturit, jotka mittaavat painovoimaa hyvin tarkasti, ovat erikoistapauksia. Ne ovat verrattavissa gravimetreihin: jos ne perustuvat aineen elastisuuteen, ne vaativat samanlaista säännöllistä kalibrointia. Ne muuttuvat ajassa (niin sanottu *käynti*).

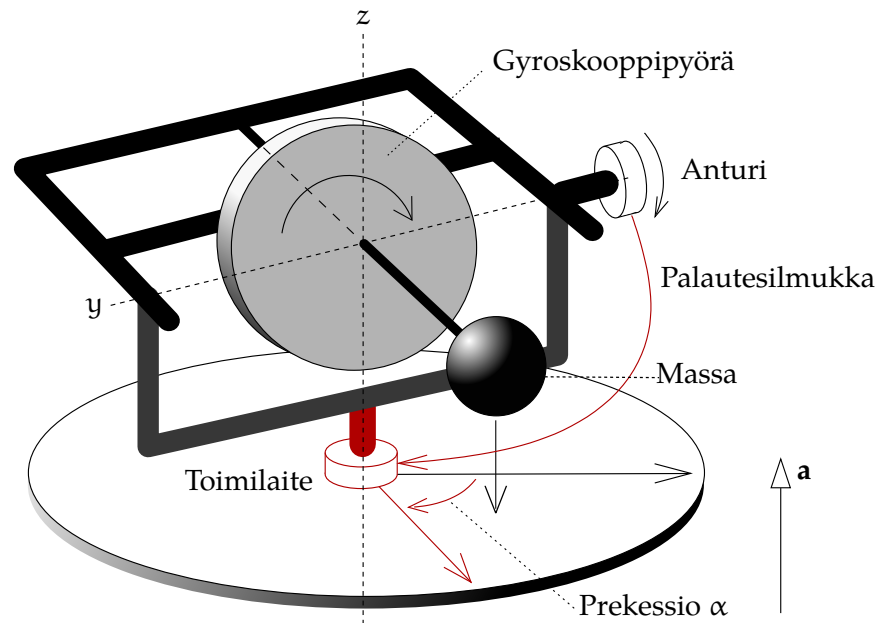
Vaihtoehtoinen mittarityyppi on *heilurikiihtyvyyssmittari*. Laitteessa massa on kiinnitetty puomin päähän. Puomin poikkeama mitataan anturilla ja *nollataan* toimilaitteella. Nollaus periaatteessa takaa lineaarisen käyttäytymisen. Tällä mittarityypillä ei ole myöskään käyntiä. Mittauksen laatu riippuu kuitenkin laadusta, jolla tunnettu nollausvoima voidaan luoda, esimerkiksi sähkövirtana sähkömagneettisen toimilaitteen läpi.

Gyroskoopipohjaisia heilurikiihtyvyyssmittareita on käytetty pitkään ohjuksissa, koska niiden tarkkuus on ylivoimainen. Niissä puomi on



KUVA 5.5. Heilurikiihtyvyyssmittari.

⁷Yksikköä mGal käytetään painovoiman ja kiihtyvyyden yhteydessä, ja se on 10^{-5} m/s^2 . Maanpinnan painovoima on $\approx 9,81 \text{ m/s}^2 = 981\,000 \text{ mGal}$.



KUVA 5.6. Gyroskooppipohjainen heilurikihtiämittari. Kulma α on kokonaisprekessiokulma, joka on verrannollinen mitatun kiihtyvyyden aikaintegraaliin.



samalla pyörivän gyroskoopin akseli, ja puomin päässä oleva massa aiheuttaa väännön, joka saa gyron prekessoimaan kiihtyvyyden suunnan eli z-akselin ympäri. Tämä prekessioliike mitataan kiihtyvyyssmittarin mittasuurena⁸. Nollaava palautesignaali y-akselista z-akselin vääntötoimilaitteeseen (engl. *torquer*) aiheuttaa oikean määrän prekessiota ja kompensoi näin vääntöä. Tämä varmistaa, että z-akselin ympäri ei kohdistu vääntömomenttia takaisin gyroskooppiin. Näin gyron pyörimisakseli pysyy kohtisuorassa z-akselia kohti. Katso kuva 5.6.

Inertianavigoinnin strategisen tärkeyden takia (ohjukset) hyvät kiihtyvyyssmittarit, kuten hyvät gyroskoopit, olivat kauan vaikeasti saatavia ja kalliita. Nykyisin tilanne on parempi. Modernit kiihtyvyyssmittarit ovat usein MEMS-pohjaisia (*microelectronic motion sensors* eli mikroelektroniset kiihtyvyyssanturit) ja edullisia. Ne eivät kuitenkaan yllä gyroskooppipohjaisten kiihtyvyyssmittareiden tarkkuuteen.

⁸Esimerkiksi saksalainen V-2 käytti integroivaa gyroskooppipohjaista kiihtyvyyssmittaria laittamaan ajoainehanat kiinni ("*Brennschluss*"), kun tavoitenoisuus oli saavutettu (Wikipedia, PIGA accelerometer).



5.3 Toteutus

Kansantajuuden inertianavigoinnin ja inertiamittausyksiköiden alkeiden selityksen antaa King (1998).

Inertiamittausyksikön toteuttamiseen on olemassa kaksi hyvin erilaista lähestymistapaa:

- 1) *strapdown*-ratkaisu
- 2) vakautettu alusta -ratkaisu.



5.3.1 Strapdown-ratkaisu

Strapdown-ratkaisussa gyroskoopialusta on kytketty kiinteästi kulkuneuvon runkoon. Kun kulkuneuvon asento muuttuu, gyroskoopin akselin päät painavat kehikkoa vasten voimalla, joka mitataan tarkasti voima-antureiden avulla. Voimasta \mathbf{F} saadaan vääntömomentti \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \langle \vec{\ell} \times \mathbf{F} \rangle,$$

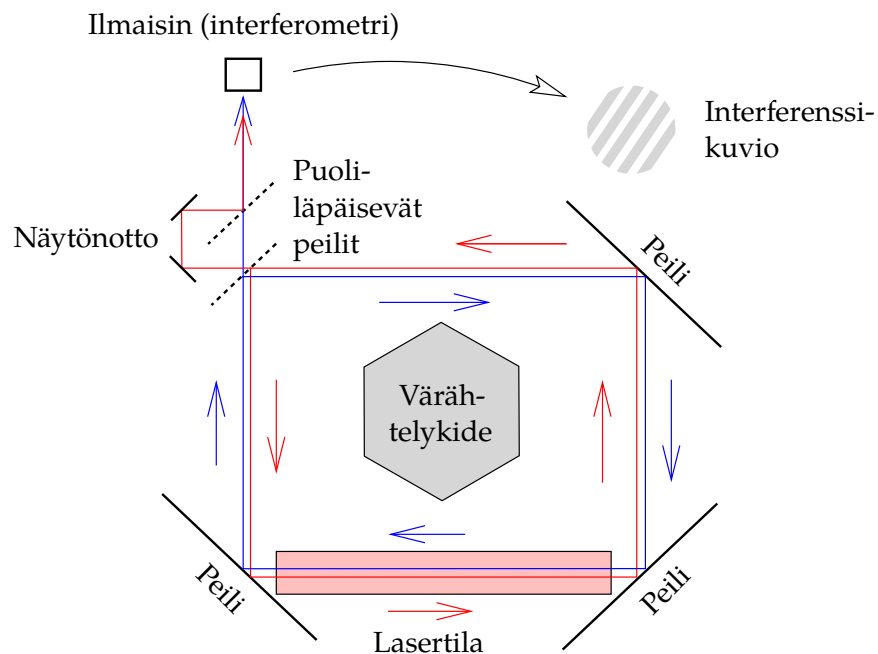
jossa $\vec{\ell}$ on gyroskoopin akselin pituus vektorina: ”vääntö on varsi kertaa voima”. Symboli \times on taas ulkoinen tulo eli vektoritulo. Mitatuista vääntömomenteista lasketaan kulkuneuvon kääntymisnopeudet kulmamitassa $\frac{d}{dt} \alpha_i$ käyttäen yhtälöä 5.2:

$$\frac{\mathbf{N}}{\omega} = \mathbf{J} \left(\frac{1}{\omega} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right).$$

Suluissa oleva lauseke edustaa tässä gyroskoopin pyörimisvektorin kääntymistä, mikä vastaa kulkuneuvon rungon kääntymistä. On selvää, että jokainen gyroskooppi pystyy antamaan kääntymisnopeudet vain kahteen suuntaan, jotka ovat kohtisuorassa sen pyörimisakseliin nähden. Kun gyroskooppeja on kolme, käytetään jokaista niistä havaitsemaan kiertymiä vain yhden akselin ympäri.

Toinen teknologinen ratkaisu on niin sanottu *rengaslasergyroskooppi*, joka perustuu valon interferenssiin: Sagnacin⁹ ilmiö, 1913. Laitteessa monokromaattinen laservalo kulkee renkaassa kahteen vastakkaiseen suuntaan. Ilman pyörähdysliikettä valo muodostaa *seisovan aallon*, jossa solmut eivät liiku. Kuitenkin renkaan pienikin kiertoliike saa solmut kulkemaan renkaan sisällä vastakkaiseen suuntaan, jolloin tuloksena on, että ei-pyörivässä koordinaatistossa ne pysyvät paikoillaan.

⁹Georges Sagnac (1869—1928) oli ranskalainen fyysikko ja fysikaalisen optiikan tutkija.



KUVA 5.7. Sagnacin interferometri.

Yksinkertaisin tapa rakentaa rengaslaser on käyttää kiinteitä peilejä. Nykyisin käytetään usein pitkää valokuitua, joka on kelattu renkaan reunan ympärille tuhansia kertoja. Näin efekti monituhatkertaistuu ja herkkyys kasvaa. Saavutettava herkkyys on luokkaa 0,000 01 astetta tunnissa. [MathPages](#), [The Sagnac Effect](#).



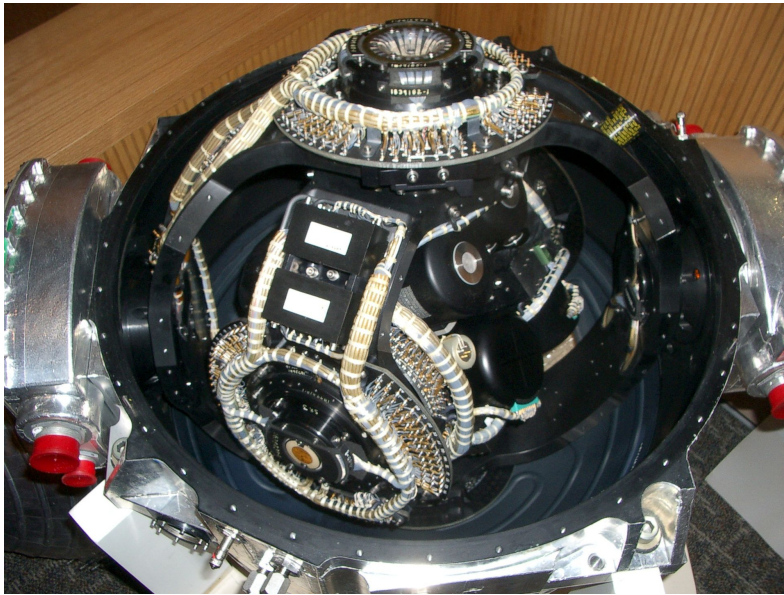
5.3.2 Vakautetun alustan ratkaisu

Vakautetun alustan ratkaisussa koko gyroskooppijärjestelmä on ripustettu kolmiakselisen, vapaasti kääntyvän kardaanisen rengasjärjestelmän sisälle. Tämän ansiosta, vaikka kulkuneuvon asento vaihtelisi, gyroskooppinen kehikko säilyttää asentonsa avaruudessa.

Kuvassa 5.8 on esitetty kolmiakselinen laite, jota käytettiin syvän avaruuden tehtävissä. Laitteella on kolme gyroskooppia sen asennon säilyttämiseksi inertiaalisen akseliston suhteen. Jokainen gyroskooppi on oman gyroskooppikokoonpanon sisällä. Kokoonpanon kotelo on piirretty lieriönä.

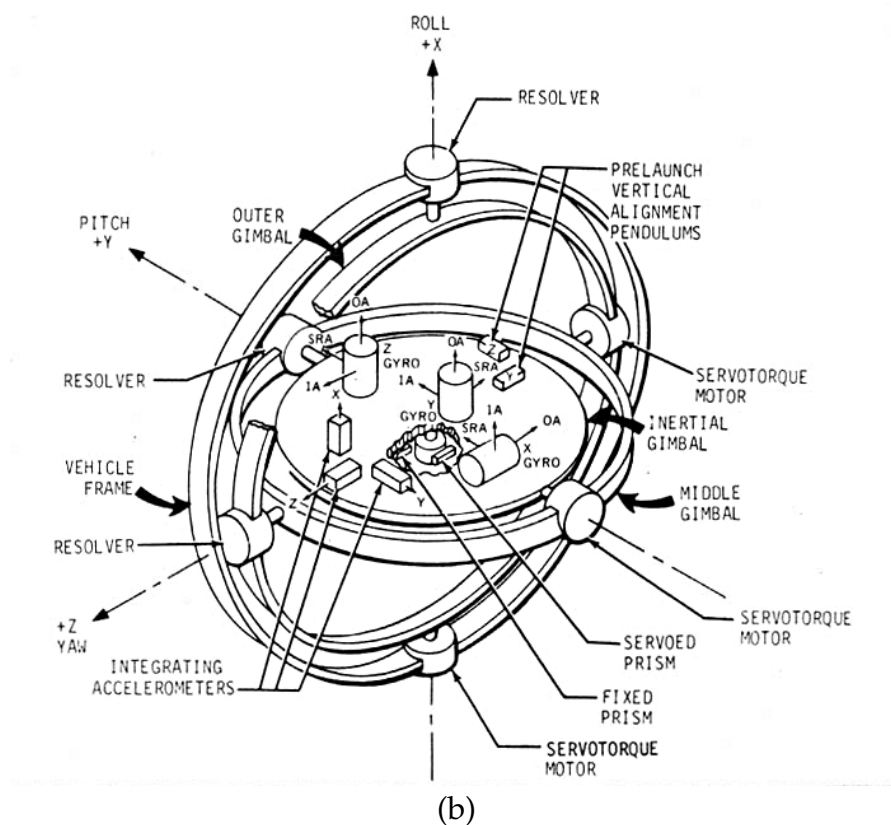
Jokainen gyroskooppikokoonpano on itsenäinen yksikkö, joka on rakennettu reagoimaan vain kiertymiin yhden akselin eli syöttöakselin ympäri. Sitä kutsutaan myös yhden vapausasteen gyroskoopiksi, katso [Jekeli \(2001, kuva 3.1\)](#).

Tässä inertialaitteessa gyroskooppikokoonpanoja käytetään nollausantureina. Havaittu kiertymä syötetään takaisin vastaavalle "servotorque-



(a)

Valokuva, Durbin (2004)



(b)

Kuvio, NASA. IA = *input axis*, syöttöakseli, OA = *output axis*, lähtöakseli ja SRA = *spin reference axis*, pyörimisakselin vertaussuunta

Kuva 5.8. Inertiaalite ST-124. Tätä vakautettu alusta -tyyppistä laitetta käytettiin Saturnus V -kuuraketissa.



moottorille” kiertymän nollaamiseksi, jotta sisäisen alustan, ”*inertial gimbalin*”, asento pysyy muuttumattomana inertiaalisessa avaruudessa. Koko laitteen lähtö koostuu kolmesta ”*resolverien*” antamasta kulmasta, jotka ovat itse asiassa raketin rungon asentokulmat $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ inertiaalisessa avaruudessa.

Huomaa, että jokaisen gyroskoopin pyörimisakseli on kohtisuorassa gyroskooppikokoonpanon kotelon akseliin nähden. Kotelon akseli on myös gyroskoopin lähtöakseli (OA).

Terrestrisissä sovelluksissa käytetään inertiaalisen ei-pyörivän koordinaatiston sijasta *paikallista* kiinteään Maahan kiinnitettyä koordinaatistoa. Gyroskooppien akseleita pidetään samansuuntaisina toposentrisen koordinaatiston akselien kanssa:

- vaakatason suunnat x ja y
- ylös-suunta z .

Vaakatasossa olevien kahden gyroskoopin akselit eivät välttämättä osoita pohjoiseen ja itään, vaan kahteen muuhun suuntaan vaakatasossa. Nämä suunnat ovat keskenään kohtisuoria ja eroavat pohjoisesta ja idästä atsimuuttikulmalla α , joka muuttuu ajassa. Käsitteellisesti voi kuitenkin olla järkevä ajatella, että kyse on virtuaalisista ”pohjoisen” ja ”idän” gyroskoopeista¹⁰.

Tämän lisäksi terrestrisissä sovelluksissa, mukaan lukien ilmailu, käytetään vain kahta vaakatasossa olevaa kiihtyvyyssmittaria. Korkeudesta huolehditaan muilla tavoin, koska inertianavigoinnin tarkkuus ei pidemmällä aikavälillä riitä siihen.

Jotta vaakagyroskooppien akselit saadaan pidettyä vaakatasossa, gyroskooppien kehikkoon kohdistetaan sopivia vääntöjä tähän tarkoitukseen suunniteltujen vääntötoimilaitteiden (engl. *torquers*) avulla. Tarvittavat väännöt voidaan laskea analogisesti tai digitaalisesti laitteen paikan ratkaisemisen yhteydessä. Lähestymistapa tunnetaan nimellä *Schulerin viritys*.



5.4 Inertianavigointi kiinteään Maan järjestelmässä

Vaihtoehtoinen lähde on Cooper (1987), sivut 104–107: hänellä on hieman erilainen käsittelytapa.

¹⁰Inertia-alustan suuntaus on itse asiassa mahdollista saada seuraamaan pohjoista, niin sanottu ”*north-following*”, kun gyroskooppikehikon kolmanteen akseliin sovelletaan sopivaa vääntöä, katso Jekeli (2001, alaosio 4.2.2) ja osio 5.10.



5.4.1 Maan pyörähdysliike

Kirjoitetaan inertiaalinen paikkavektori Maan mukana pyörivän koordinaatiston paikkavektorin funktioksi:

$$\mathbf{x}_{\beta'} = \mathbf{R}(\theta) \mathbf{x}_{\beta}, \quad (5.8)$$

jossa θ on *Greenwichin tähtiäika*, maapallon asentoa avaruudessa kuvaava kulma. Sen aikaderivaatta $\omega_{\oplus} = \frac{d}{dt}\theta$ on Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus.

Yhtälössä 5.8 sekä inertiaalisen että Maan mukana pyörivän koordinaatiston z-akselit osoittavat Maan pyörimisakselin suuntaan. Avaruusvektorit esitetään molemmissa koordinaatistoissa tavanomaisesti niiden komponenttien muodostamina kahtena eri abstraktina vektorina:

$$\mathbf{x}_{\beta} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\beta'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z \end{bmatrix}.$$

Kiertomatriisi näiden kahden koordinaatiston välillä on

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ja matriisin aikaderivaatta (ketjusääntö) on

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt}.$$

Differentiointi Leibnizin tulon derivoimissäännön avulla antaa nopeusvektorille

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\beta'} &= \frac{d}{dt}\mathbf{x}_{\beta'} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}(\theta) \mathbf{x}_{\beta}) = \mathbf{R}(\theta) \frac{d}{dt}\mathbf{x}_{\beta} + \left(\frac{d}{dt}\mathbf{R}(\theta)\right) \mathbf{x}_{\beta} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{\beta} + \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tässä toinen termi on

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{R}(\theta)\right) \mathbf{x}_{\beta} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} -x \sin \theta - y \cos \theta \\ x \cos \theta - y \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Jos määritellään Maan kulmanopeus- eli pyörähdysvektoriksi

$$\vec{\omega}_{\oplus} = \vec{\omega}_{\oplus, \beta} = \vec{\omega}_{\oplus, \beta'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{\oplus} \end{bmatrix} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

saadaan

$$\begin{aligned} R(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}_{\beta} \rangle &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\langle \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} -x \sin \theta - y \cos \theta \\ x \cos \theta - y \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sama tulos. Siis

$$\left(\frac{d}{dt} R(\theta) \right) \mathbf{x}_{\beta} = R(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}_{\beta} \rangle.$$

Seuraa, että

$$\mathbf{v}_{\beta'} = R(\theta) \mathbf{v}_{\beta} + R(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}_{\beta} \rangle. \quad (5.10)$$

Otetaan tilannekuva, kun inertiaaliset ja mukana pyörivät akselit ovat samansuuntaisia: $\theta = 0 \implies R(\theta) = I$, antaen

$$\mathbf{v}_{\beta'} = \mathbf{v}_{\beta} + \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}_{\beta} \rangle \iff \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle.$$

Näin on tullut osoitetuksi tunnettu *tulos*:

Koordinaatiston kiertoliikkeen vaikutus vektorin aikaderivaattaan voidaan esittää kiertovektorin $\vec{\omega}_{\oplus}$ ristitulona sen vektorin kanssa.

Tämä pätee yleisesti, esimerkiksi

$$\begin{aligned} \dot{R}(\theta) \mathbf{v} &= R(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle, \\ \dot{R}(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle &= R(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle \rangle, \end{aligned}$$

tulokset, joita käytetään seuraavasti. Yhtälön 5.10 toinen differentiointi antaa kiihtyvyyden:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\beta'} &= R(\theta) \mathbf{a}_{\beta} + \dot{R}(\theta) \mathbf{v}_{\beta} + \frac{d}{dt} \left(R(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}_{\beta} \rangle \right) = \\ &= R(\theta) \mathbf{a}_{\beta} + R(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v}_{\beta} \rangle + \\ &+ \left(R(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v}_{\beta} \rangle + \dot{R}(\theta) \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}_{\beta} \rangle \right) = \\ &= R(\theta) \left(\mathbf{a}_{\beta} + 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v}_{\beta} \rangle + \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}_{\beta} \rangle \rangle \right). \end{aligned}$$



Laittamalla taas $\theta = 0$ saadaan

$$\mathbf{a}_{\beta'} = \mathbf{a}_{\beta} + 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v}_{\beta} \rangle + \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}_{\beta} \rangle \rangle. \quad (5.11)$$



5.4.2 Kiihtyvyys

Pyörivällä maapallolla määritetty kolmiulotteinen geosentrinen koordinaatisto (x, y, z) ei ole inertiaalinen: kiihtyvyydelle pätee yhtälö 5.11. Symbolisesti kirjoitettuna:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle + \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle \rangle, \quad (5.12)$$

jossa

\mathbf{a}' kiihtyvyys inertiaalisessa koordinaatistossa

\mathbf{a} kiihtyvyys Maan pintaan nähden, ”mukana pyörivässä” kiinteän Maan koordinaatistossa

$\vec{\omega}_{\oplus}$ Maan pyörähdysvektori, vakio aksiaalivektori, joka on suunnattu pyörähdys- eli z-akselia pitkin

\mathbf{v} nopeus samassa Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa

\mathbf{x} kulkuneuvon geosentrinen sijainti.

Yllä olevassa yhtälössä 5.12 toinen termi oikealla on niin sanottu *coriolisvoima* ja kolmas termi on *keskipakoisvoima*.



5.4.3 Inertianavigoinnin perusyhtälö

Lineaariset kiihtyvyyshmittarit mittaavat käytännössä paikallisen painovoiman ja kulkuneuvon geometrinen liikkeiden *yhteisvaikutusta*. Toisin sanoen *kulkuneuvossa* mitattu kiihtyvyys on inertiaalisessa koordinaatistossa

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}' - \mathbf{g}'(\mathbf{x}), \quad (5.13)$$

eli käyttäen yhtälöä 5.12,

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \overbrace{2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle}^{\text{corioliskiihtyvyys}} + \overbrace{\langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle \rangle}^{\text{keskipakoiskiihtyvyys}} - \mathbf{g}'(\mathbf{x}),$$

jossa

$\tilde{\mathbf{a}}$ kulkuneuvossa mitattu kiihtyvyyshmittari. Tämä on $-\tilde{\mathbf{g}}$, kulkuneuvossa havaitun ”painovoiman” vastaluku¹¹

¹¹ On tärkeää ymmärtää tämä. Kiihtyvyys $\tilde{\mathbf{a}} = -\tilde{\mathbf{g}}$ kiihtyvyyshmittareiden havaitsemana

- \mathbf{a}' kiihtyvyys inertiaalisessa koordinaatistossa
 \mathbf{a} kiihtyvyys Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa
 $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ *gravitaatio* (vetovoiman) kiihtyvyys paikan \mathbf{x} funktiona eli vapaan putoamisen kiihtyvyys inertiaalisessa koordinaatistossa.

Pallosymmetriselle maapallolle \mathbf{g}' voidaan laskea suoraan Newtonin gravitaatiolaista:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) \approx -GM_{\oplus} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3},$$

mutta myös monimutkaisemmat mallit kelpaavat: esimerkiksi pyörähdysellipsoidinen normaalikenttä, jossa Maan litistyneisyyden vaikutus on mukana, ja jopa hyvin yksityiskohtaiset Maan gravitaatiokentän mallit, kuten [EGM2008](#) (Earth Gravity Model 2008).

Kirjoitetaan

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}' - \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle \rangle, \quad (5.14)$$

jossa \mathbf{g} on *painovoimavektori*, gravitaation ja keskipakoiskiihtyvyyden yhteisvaikutus eli vapaan putoamisen kiihtyvyys Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa. Silloin

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle - \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (5.15)$$

Yhtälöjä [5.13](#) ja [5.15](#) kutsutaan molempia *inertianavigoinnin perusyhtälöksi*. Molemmat mahdollistavat sijainnin \mathbf{x} , nopeuden \mathbf{v} ja kiihtyvyyden \mathbf{a} yhtäaikaisen integroinnin dynaamisesti, siis ”lennossa”, edellyttäen, että ulkopuolinen kenttä \mathbf{g} tai \mathbf{g}' on annettuna ja että kulkuneuvossa mitataan kiihtyvyyttä $\tilde{\mathbf{a}}$.

Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa planeetamme pyörähdysliike aiheuttaa kiihtyvyydsmittareiden havaitseman painovoimavektorin hidasta kääntymistä itä-länsisuunnassa gyroskooppien määräämien inertiaalisuuntien suhteen, vaikka kulkuneuvo seisoo maassa.

Ilmiötä käytetään gyroskooppikehikon suuntaamiseksi oikein paikalliseen pohjoissuuntaan nähden, ennen esimerkiksi lentokoneen nousua ilmaan tai raketin laukaisua. Vastaavasti ilmiötä voidaan käyttää paikallisen pohjoissuunnan ratkaisemiseksi gyroskooppien kehikon järjestelmässä. Lisäksi kiihtyvyydsmittarit antavat heti paikallisen painovoiman

edustaa *kulkuneuvon* kiihtymistä vapaasti putoavan koordinaatiston suhteen. Painovoima $\tilde{\mathbf{g}} = -\tilde{\mathbf{a}}$ painovoima-antureiden havaitsemana edustaa vapaan putoamisen kiihtyvyyttä *kulkuneuvon sisällä* sen kappalekoordinaatiston suhteen. Toisin sanoen kyseessä on kulkuneuvon sisällä toimiva pseudovoima.



eli luotiviivan suunnan. Yhdessä kaksi suuntaa riittävät koko kehikon suuntaamiseksi — paitsi pohjois- tai etelänavalla.



5.5 Vakautettu alusta

Tutkitaan ensin *vakautettua alustaa*. Se toteutetaan gyroskoopilla, joka on kiinnitetty kehikkoon, joka pidetään paikallisen horisontin suuntaisena. Vakautettu alusta toimii esimerkiksi meri- tai ilmagravimetrin alustana, koska kojeen mittausakselin on oltava koko ajan paikallisen luotiviivan suuntainen muutaman kaariminuutin tarkkuudella.

Vakautetun alustan ratkaisussa käytetään palautesilmukkaa nimeltä *Schulerin silmukka*. Näin saadaan ohjattua gyroskoopin pyörimisakselin suuntaa siten, että sen, ja sen sisältävän sisäisen renkaan, suunta seuraa vaakatasoa. Tämä tapahtuu sillä tavalla, että gyroskoopin kehyksen kääntämisyritys vaakatasossa — kehyksen pystyakselin ympäri — aiheuttaa gyroskoopin *prekessioilmiön*: gyroskoopin oma pyörimisakseli kääntyy alas- tai ylöspäin.

Vakautettu alusta edellyttää *sopivaa anturia*, joka havaitsee, että gyroskoopin akseli poikkeaa vaakatasosta kulman θ verran. Anturi lähettää kulmaan θ liittyvän signaalin $f(\theta(t), t)$ palautesilmukan kautta pystyakselin moottoria ohjaavalle aktuaattorille eli *toimilaitteelle*, kuva 5.9. Tällaisen silmukan, joka toimii hyvin kulkuneuvon liikkeessä, rakentaminen on haaste, ja aiheen käsittelyä lykätään osioon 5.7.

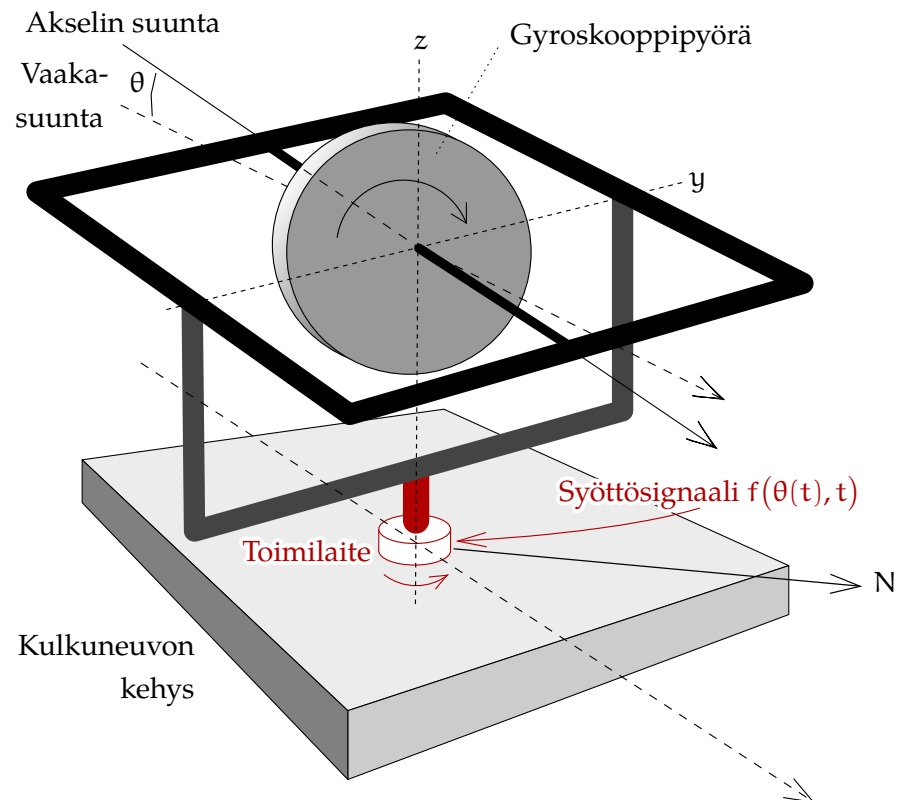
Kun laite seisoo kiinteän Maan pinnalla, asia on helpompi. Oleta, että vääntö pystyakselin ympäri tehdään yksinkertaisesti verrannolliseksi gyroskoopin havaittuun akselin poikkeamaan θ vaakatasosta. Silloin tämän poikkeaman θ muutos ajassa on

$$\frac{d\theta}{dt} = -k_1\theta$$

ratkaisuna

$$\theta(t) = \theta(t_0) \exp(-k_1(t - t_0)),$$

siis poikkeama menee eksponentiaalisesti nollaan. Virittämällä palautesilmukan vakio k_1 saadaan tämä tapahtumaan sopivan nopeasti. Tätä tekniikkaa voidaan käyttää vakautetun alustan tasaamiseksi ennen lentoon lähtöä.



KUVA 5.9. Vakautetun alustan periaate. Syöttösignaali aiheuttaa prekessioliikkeen, joka pitää gyroskoopin akselin suunnan vaakatasossa. Tavanomaisesti pystysuoraa akselia eli z-akselia, jonka ympäri kohdistuu vääntöä, kutsutaan syöttöakseliksi ja vaakasuoraa y-akselia, jonka ympäri syntyy prekessiota, lähtöakseliksi.



5.6 Hyrräkompassi

Hyrräkompassin kuvassa 5.10 näkyvä palautesilmukka käyttää hyväkseen *Maan pyörähdysliikettä*. Koska Maa pyörii akselinsa ympäri, kallistuu horisonttitaso koko ajan. Itäinen horisontti vajoaa, läntinen horisontti nousee. Pyörivä ja vapaasti ripustettu gyroskooppi, jonka pyörimisakseli oli alun perin vaakatasossa, ei ole enää jonkin ajan kuluttua vaakatasossa.

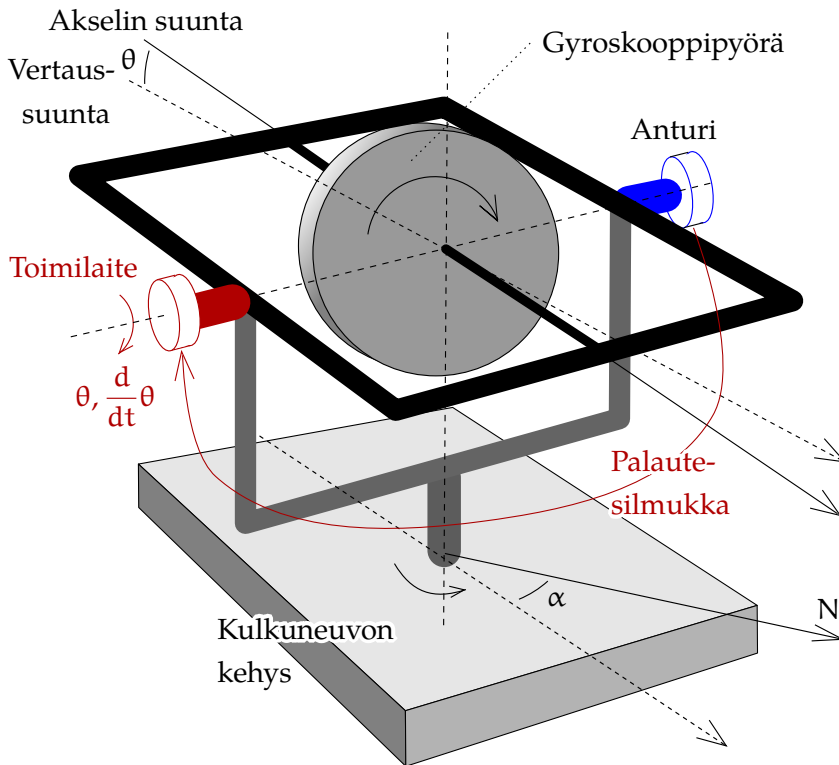
Jos Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus on ω_{\oplus} , on kulman θ aikaderivaatta tämän ilmiön takia

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_{\oplus} \cos \varphi \sin \alpha,$$

jossa φ on leveysaste ja α gyroskoopin pyörimisakselin atsimuutti.

Palautesilmukka saa anturilta kulman θ aikaderivaatan $\frac{d}{dt}\theta$ ja syöttää sen sopivasti vahvistettuna aktuaattoriin eli toimilaitteeseen. Kun toimilaite yrittää kääntää gyroskoopin akselin takaisin vaakatasoon,





Kuva 5.10. Hyrräkompassin periaate. Palautesilmukka tuottaa prekessioliikkeen, joka saa gyron pyörimisakselin kääntymään pohjoiseen.

on lopputulos *prekessio* pystyakselin ympäri: α muuttuu. Kirjoitetaan yhtälö

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k_2 \frac{d\theta}{dt} = -k_2 \omega_{\oplus} \cos \varphi \sin \alpha \quad (5.16)$$

jossa k_2 oletetaan positiiviseksi. Jos α on riittävän pieni, $\sin \alpha \approx \alpha$ ja ratkaisu on

$$\alpha(t) \approx \alpha(t_0) \exp(-(k_2 \omega_{\oplus} \cos \varphi)(t - t_0)).$$

Toisin sanoen α menee eksponentiaalisesti ja asympotoottisesti nollaan, ja *gyroskoopin akseli kääntyy pohjoiseen*. Näin olemme keksineet hyrräkompassin. Tämä tietysti edellyttää, että laite pysyy samalla paikalla tasattuna tai käytännössä liikkuu vain hitaasti, esimerkiksi laivalla.

Yleisempi tapa rakentaa toimiva hyrräkompassi on käyttää itse kulmaa θ sen aikaderivaatan lisäksi. Jos kirjoitetaan

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k_3 \theta,$$

saadaan differentioimalla

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -k_3 \frac{d\theta}{dt} = -k_3 \omega_{\oplus} \cos \varphi \sin \alpha \approx -k_3 \omega \cos \varphi \cdot \alpha.$$



Tämä on *harmonisen värähtelijän* yhtälö, jonka eräät ratkaisut ovat

$$\alpha(t) = \cos(t\sqrt{k_3\omega_{\oplus}\cos\varphi}), \quad \alpha(t) = \sin(t\sqrt{k_3\omega_{\oplus}\cos\varphi}).$$

Valitettavasti nämä ratkaisut ovat jaksollisia, eivätkä ne suppene pohjoisuuntaan $\alpha = 0$. Paras ratkaisu saadaan yhdistämällä θ ja $\frac{d}{dt}\theta$ seuraavalla tavalla:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k_2\omega_{\oplus}\cos\varphi\frac{d\alpha}{dt} - k_3\omega_{\oplus}\cos\varphi \cdot \alpha$$

eli

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_{\oplus}\cos\varphi\left(k_2\frac{d\alpha}{dt} + k_3\alpha\right) = 0.$$

Tämä on yleinen toisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö. Riippuen kertoimista k_2 ja k_3 sillä on aaltomaisia, eksponentiaalisesti vaimennettuja tai *kriittisesti vaimennettuja* ratkaisuja, katso [Wikipedia, Damping ratio](#). Viimeksi mainittu vaihtoehto on paras kompassin toimivuuden kannalta.

Jos kirjoitetaan *värähtelyajan käänteisluvuksi* $\kappa = \sqrt{k_3\omega_{\oplus}\cos\varphi}$ ja

$$k_2 = \frac{2\kappa}{\omega_{\oplus}\cos\varphi},$$

saadaan kriittisesti vaimennettu tapaus

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\kappa\frac{d\alpha}{dt} + \kappa^2\alpha = 0,$$

jonka yleinen ratkaisu on

$$\alpha(t) = (a + bt)e^{-\kappa t},$$

jossa a ja b ovat mielivaltaisia, alkuehtojen määrittämiä vakioita.

Usein k_3 , harmoninen palautuskerroin, toteutetaan kiinnittämällä jäykästi gyroskooppikehikon sisäiseen renkaaseen painava puolirengas, joka ulottuu alaspäin. Paino yrittää vetää gyroskoopin pyörimisakselin takaisin vaakatasoon. Vaimennuskerroin k_2 puolestaan toteutetaan perinteisesti käyttämällä tahmeaa nestettä sisäisen renkaan laakereissa.



5.7 Schulerin heiluri



5.7.1 Periaate

Schulerin¹² *heiluri* on heiluri, jonka pituus on sama kuin Maan säde R . Jos sellainen heiluri olisi käytännössä mahdollinen, esimerkiksi

¹²Maximilian Joseph Johannes Eduard Schuler (1882–1972) oli saksalainen navigointiteknologian pioneeri, [Wikipedia, Max Schuler](#).

massana pitkän massattoman sauvan päässä, sen jakso olisi (yhden g :n painovoimakentässä!)

$$P_{\text{Schuler}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

jossa g on painovoima Maan pinnalla.

Tämä jakso, $P_{\text{Schuler}} = 84,4$ minuuttia, on sama kuin Maan pinnan tuntumassa Maata kiertävän satelliitin rataperiodi — jos ilmakehää ei olisi olemassa.

Vaikka näin pitkää heiluria ei voida rakentaa, voidaan kuitenkin ajatella heiluria, jonka jakso on P_{Schuler} . Tällainen voisi olla esimerkiksi laaja kappale, jonka ripustuspiste on hyvin lähellä sen massakeskipistettä¹³.

Kaiken yksinkertaisin heiluri on massa massattoman sauvan päässä. Olkoon sen pituus ℓ . Jos se heiluu pois pystysuunnasta kulman¹⁴ θ verran, on palauttava voima

$$F = mg \sin \theta,$$

ja kun sen massa on m , voidaan sen kiihtyvyys laskea Newtonin toisen lain avulla:

$$m \frac{d^2(-\theta\ell)}{dt^2} = mg \sin \theta \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{\ell}\theta, \quad (5.17)$$

värähtely-yhtälö, jonka eräs ratkaisu on

$$\theta(t) = \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right),$$

josta seuraa jakso

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$



5.7.2 Heiluri vaunulla

Laitetaan tämä heiluri vaunulle, joka liikkuu vaakasuuntaan lineaarisella kiihtyvyydellä $a(t)$. Heilurin koemassa kokee vaunun koordinaatistossa samansuuruisen vastakkaisen kiihtyvyyden $-a(t)$. Koska heilurin pituus on ℓ , sen kulmakiihtyvyys on

$$\frac{d^2\tilde{\theta}}{dt^2} = \frac{1}{\ell} \left(a - g \cdot (\tilde{\theta} - \psi) \right).$$

¹³Valitettavasti ei edes tämä toimi. Kuten Schuler jo osoitti, ripustuspisteen ja heilurin massakeskipisteen välisen etäisyyden olisi oltava kohtuullisen kokoisen heilurin tapauksessa alle mikrometri.

¹⁴Yhdenmukaisuuden takia muiden kulmien kanssa kulma θ lasketaan positiiviseksi negatiiviselle lineaariselle koemassan siirtymälle.

Tässä $\tilde{\theta}$ on heilurin poikkeama *lähtöpisteen* luotiviivan suunnasta.

Vaunun kulkema matka ajan funktiona on $x(t)$. Tämä lineaarinen etäisyys liittyy kiihtyvyyteen näin:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a(t).$$

Sama matka ilmaistuna *geosentrisenä kulmaetäisyytenä* eli kulmana Maan keskipisteestä katsottuna on $\psi(t) = x(t)/R$. Tämä suure, joka edustaa myös paikallisen luotiviivan muutosta matkan varrella, noudattaa differentiaaliyhtälöä

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{1}{R}a(t). \quad (5.18)$$

Vähennys antaa

$$\frac{d^2}{dt^2} (\tilde{\theta} - \psi) = \frac{1}{\ell} \left(a - g (\tilde{\theta} - \psi) \right) - \frac{a}{R}.$$

Nyt oletetaan, että heilurin pituus $\ell = R$. Silloin, jos $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\theta} - \psi$, seuraa

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{R}\theta(t). \quad (5.19)$$

Tässä θ on kulma heilurin ja *paikallisen* luotiviivan välillä. Yhtälö 5.19 on identtinen heiluriyhtälön 5.17 kanssa.

Eräs yhtälön 5.19 ratkaisu on $\theta = 0$ identtisesti. Siis:

Vaikka vaunu liikkuu ja kiihtyy vaakasuuntaan, heiluri osoittaa koko ajan Maan keskipisteeseen.

Tämä on Schulerin heiluria määrittelevä ominaisuus.



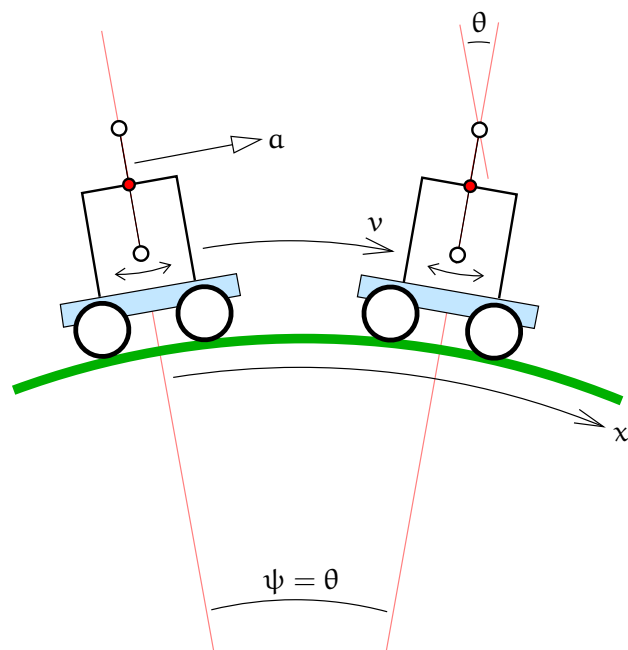
5.7.3 Toteutus inertialaitteessa

Vakautettuun alustaan perustuva inertialaite toteuttaa paria palaute-silmukkaa eli *Schulerin silmukkaa*, jotka saavat koko gyroskooppikehikon käyttäytymään Schulerin heilurin tavoin. Aina kun kehikko kääntyy pois vaakatasosta, vaakasuuntien x ja y kiihtyvyydsmittarit mittaavat painovoiman \mathbf{g} projektiota kallistuvaan tasoon ja lähettävät korjaus-impulssit vastaaviin gyroskooppikehikon toimilaitteisiin. Näin kehikko seuraa aina paikallista vaakatasoa.

Yhtälön 5.18 mukaan

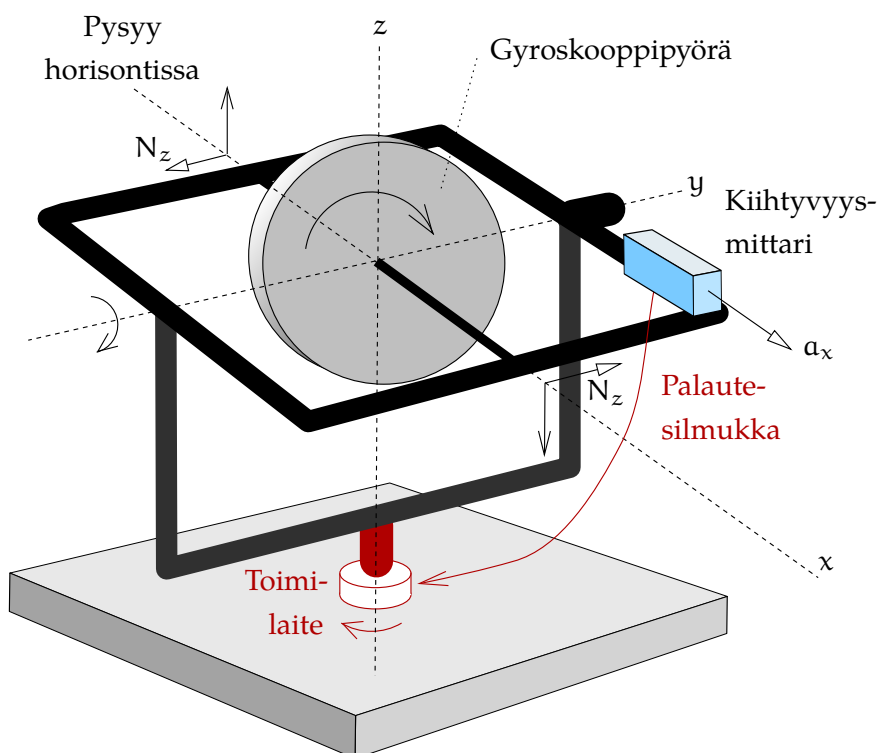
$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{1}{R}a(t),$$





KUVA 5.11. Yksiulotteinen vaunu Schulerin heilureineen kulkee kaarevan Maan pinnalla.

jossa $a(t)$ on x -suunnan lineaarinen kiihtyvyys ja R maapallon säde. Kulmafunktio $\psi(t)$ kuvaa, miten paikallinen luotiviivan suunta muuttuu



KUVA 5.12. Schulerin palautesilmukka x -suunnassa.

matkan varrella.

Gyroskoopin roottorin pyörähdysmomentti on yhtälön 5.7 mukaan

$$L = L_x = J_x \omega, \quad (5.20)$$

jossa J_x on roottorin hitausmomentti sen pyörimisakselin ympäri ja ω on sen pyörähdysnopeus. Tässä oletetaan, että gyroskoopin pyörimisakseli on horisonttitasossa (x, y) , tarkemmin x -akselin suunnassa.

Kuvassa 5.12 kuvatussa geometriassa

$$\mathbf{L} = L_x \mathbf{i} + L_y \mathbf{j} + L_z \mathbf{k} \approx J_x \omega \mathbf{i} + L_y \mathbf{j} + L_z \mathbf{k},$$

jossa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on (x, y, z) -koordinaatiston ortonormaali kanta. Oletetaan, että vektorit \mathbf{i} ja \mathbf{j} ovat lähtöpisteen horisontin tasossa ja \mathbf{k} osoittaa ylöspäin.

Gyroskooppiakselin absoluuttisen suunnan muuttumisen kokonaismäärä laskettuna lähtöpisteestä on $\tilde{\theta} = \theta + \psi$. Laske yhteen yhtälöt 5.19 ja 5.18:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) &= -\frac{g}{R} \theta(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} \psi(t) &= \frac{1}{R} a(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \tilde{\theta}(t) = \frac{1}{R} \overbrace{(a(t) - g \theta(t))}^{\tilde{a}(t)}. \quad (5.21)$$

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että kulmat θ, ψ ja $\tilde{\theta}$ ovat pieniä.

Nyt gyroskooppiakselin suunnan muutoksen $\tilde{\theta}$ toteuttaminen merkitsee yhtälön 5.20 kanssa z -akselin pyörähdysmomentin muutosta

$$L_z = \tilde{\theta} L = \tilde{\theta} J_x \omega.$$

Kulman $\tilde{\theta}$ toinen derivaatta on

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{\theta} = \frac{1}{J_x \omega} \frac{d^2}{dt^2} L_z.$$

Yhtälön 5.21 kanssa:

$$\frac{d^2}{dt^2} L_z = J_x \omega \frac{d^2}{dt^2} \tilde{\theta} = \frac{J_x \omega}{R} \tilde{a} \Rightarrow \frac{d}{dt} L_z = \frac{J_x \omega}{R} \int \tilde{a}(t) dt.$$

Yhtälön 5.2 mukaan:

$$N_z = \frac{d}{dt} L_z = \frac{J_x \omega}{R} \int \tilde{a}(t) dt. \quad (5.22)$$

Yhtälössä 5.22 N_z on tarvittava vääntö z -akselin ympäri, katso kuva 5.12. Näin Schulerin silmukka toteutetaan.



Yhtälössä 5.22 mitattu kiihtyvyys on $\tilde{a} = a - g\theta$, jossa a on geometrisen kiihtyvyys ja $g\theta$ painovoiman komponentti, joka toimii gyroskooppiakselin suuntaan.

Yhtälön 5.22 mukaisesti Schulerin silmukka toteutetaan joko laitteistotasolla — vanhemmissa laitteissa kerroin $J_x \omega / R$ on laitevakio ja käytetään analogista laitteistotason integraattoria¹⁵ — tai inertialaitteen ohjelmistossa. Aina on *kaksi* Schulerin silmukkaa, yksi x -suuntaa ja yksi y -suuntaa varten.



5.8 Mekanisointi

Koska tosielämän inertialaite on aika lailla monimutkaisempi kuin yksinkertaiset periaatteet, on laitteiston kaikkien osien käyttäytyminen mallinnettava huolellisesti. Tätä mallinnusta kutsutaan inertialaitteen *mekanisoinniksi*.

Yksinkertaisena mekanisoinnin esimerkkinä esitetään yksiulotteinen vaunu pallon muotoisen Maan pinnalla, kuva 5.11.

Määritelmän mukaisesti nopeus on

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t).$$

Kiihtyvyyttä *mitataan* jatkuvasti kiihtyvyysanturilla. Mittausarvo on $\tilde{a}(t)$. Tämä mittasuure, joka on ajan funktio, koostuu kahdesta osasta:

- geometrinen kiihtyvyys,

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$$

- painovoimavektorin projektiio kiihtyvyysmittarin akselille, $\theta(t)g$, jossa $\theta(t)$ on vaunun kallistuskulma paikallisesta pystysuunnasta eli luotiviivan suunnasta.

Tulos on

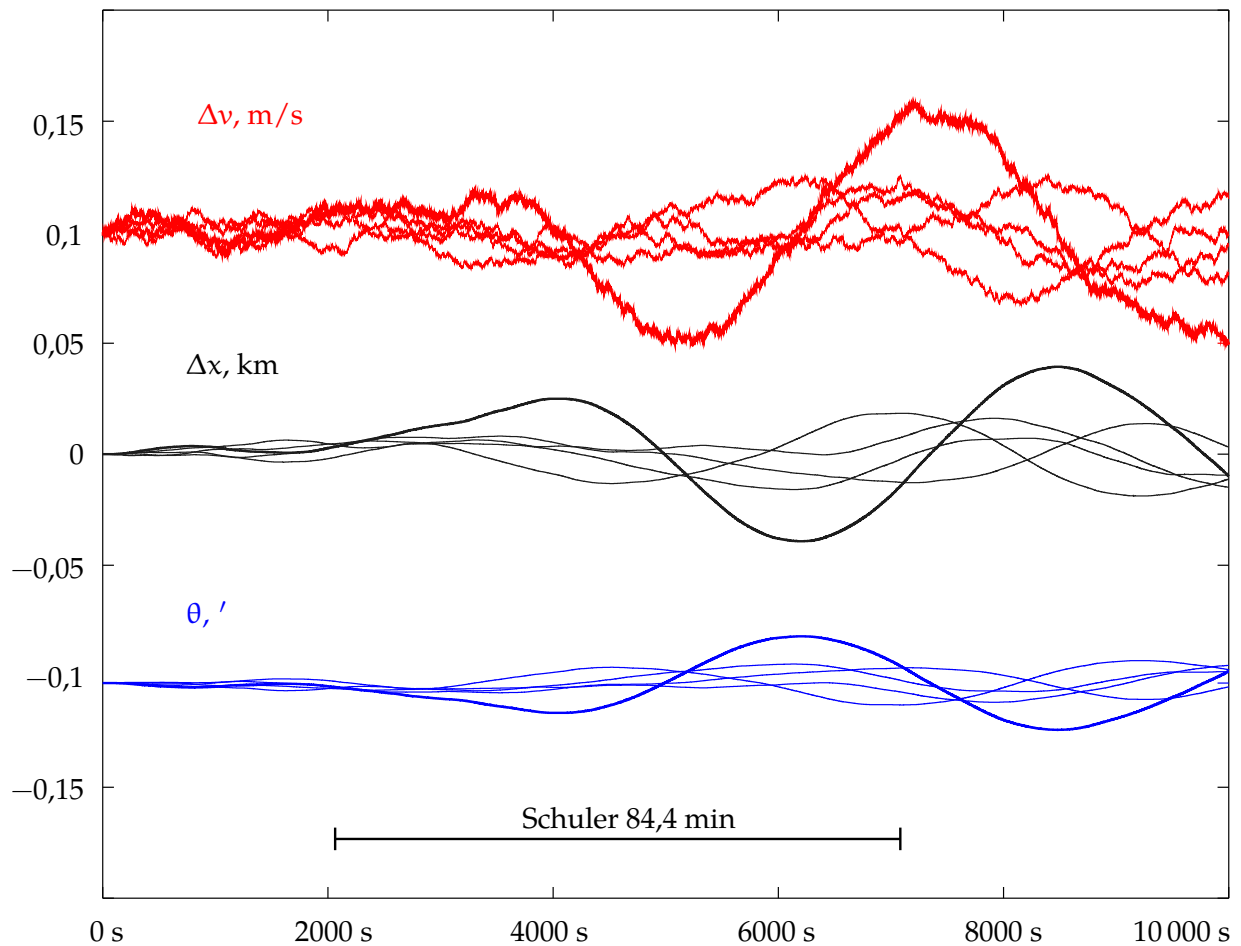
$$\frac{dv(t)}{dt} = \tilde{a}(t) + g\theta(t), \quad (5.23)$$

jossa funktio $\tilde{a}(t)$ on jatkuvan mittausprosessin tuottama.

Lopuksi käsitellään Schulerin silmukkaa. Kallistuskulma θ käyttäytyy Schulerin heilurin tavoin ja yrittää palautua nolleen yhtälön 5.19 mukaisesti:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{R}\theta(t). \quad (5.24)$$

¹⁵Esimerkiksi osiossa 5.2.2 esitetty integroiva gyroskoopipohjainen kiihtyvyysmittari.



KUVA 5.13. Virheiden kasautuminen yhtälön 5.26 yksiulotteisen mekanisoinnin mukaan. Käytetyt arvot ovat: \underline{n}_a on ± 100 mGal, $\underline{n}_g = 0$. Δv - ja θ -käyrät on siirretty selkeyden vuoksi.

Seuraavaksi *linearisoidaan*. Määritellään *likiarvot*, ajan funktiot $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ ja $\mathbf{v}^{(0)}(t)$ sekä erotussuureet $\Delta \mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}(t)$ ja $\Delta \mathbf{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^{(0)}(t)$, seuraavasti:

$$\frac{d\mathbf{x}^{(0)}(t)}{dt} = \mathbf{v}^{(0)}(t), \quad \frac{d\mathbf{v}^{(0)}(t)}{dt} = \tilde{\mathbf{a}}(t),$$

jossa $\tilde{\mathbf{a}}(t)$ oletetaan jatkuvasti mitatuksi¹⁶, ja

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}(t)}{dt} = \Delta \mathbf{v}(t), \quad \frac{d\Delta \mathbf{v}(t)}{dt} = g \theta(t).$$

Nyt yhtälöön 5.24 voidaan sijoittaa

$$g \theta(t) = \frac{d\Delta \mathbf{v}(t)}{dt},$$

¹⁶Lienee sopivaa määritellä tämä mitattu $\tilde{\mathbf{a}}(t)$ ja kaikki siitä johdetut suureet stokastisiksi. Emme tee sitä, mutta katso \underline{n}_a yhtälössä 5.26.



TAULU 5.1. Mekanisoinnin simulointi yhdessä ulottuvuudessa, octave-koodi.

```

s = [1:10000];

x(s) = 0;
v(s) = 0;
th(s) = 0;

g = 9.8; R = 6378137;

for j = 1:5
    for i=1:9999
        v(i+1) = v(i) + g*th(i) + 0.001*(rand() - 0.5);
        x(i+1) = x(i) + v(i);
        th(i+1) = th(i) - v(i)/R + 0.00000000*(rand() - 0.5);
    endfor
    hold on
    plot(s, 0.001*x, 'b');
    plot(s, v+0.1, 'c');
    plot(s, 57*60*th-0.1, 'm');
endfor

print -dpdf "schuler.pdf"

```

tuloksena

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{1}{R} \frac{d\Delta v(t)}{dt}.$$

Integroimalla — siis jättämällä pois yksi $\frac{d}{dt}$ molemmilta puolilta — saadaan

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{R}\Delta v(t), \quad (5.25)$$

ja kokonaiseksi Kalmanin suotimen dynaamiseksi malliksi saadaan

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{v}} \\ \underline{\dot{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & -1/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_a \\ \underline{n}_g \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Tähän on lisätty mahdolliset (stokastiset) kiihtyvyyssanturin ja gyroskoopin stabilointimekanismin kohinatermit $\underline{n}_a, \underline{n}_g$.

Ratkaisu toimii sillä tavalla, että lasketaan jatkuvasti ja tarkasti integroimalla tosiajassa likiarvot $v^{(0)}(t)$ ja $x^{(0)}(t)$, ja Kalmanin suotimen avulla integroidaan $\Delta \underline{x}(t), \Delta \underline{v}(t)$ ja $\underline{\theta}(t)$.

Kuvassa 5.13 nähdään, miten nämä suureet $\Delta x, \Delta y$ ja θ käyttäytyvät ajassa. Heilahteleva käyttäytyminen Schulerin aikaskaalalla on ilmeinen:



ratkaisussa sekä vaunun kallistuskulma θ että nopeuspoikkeama Δv — sekä paikkapoikkeama Δx — heilahtelevat harmonisesti Schulerin heilurin tavoin¹⁷, jaksona $P_{\text{Schuler}} = 84,4$ minuuttia. Korkeus on saatava muulla tavoin, esimerkiksi lentokoneessa ilmanpaineanturin avulla.



5.9 Maan pinnalla kahdessa ulottuvuudessa

Sama asia on yleistettävissä kahteen ulottuvuuteen. Näin voidaan rakentaa ”navigaattori”, joka toimii Maan pinnalla. Jokainen yhtälön 5.26 tilavektorin alkio tulee tuplata pohjois- ja itäkomponenteiksi.

Koska maantieteelliset koordinaatit φ ja λ ovat globaalissa käytössä käytännöllisempiä kuin karttakoordinaatit x_{pohj} ja $x_{\text{itä}}$, tehdään vielä seuraavat sijoitukset. Korvaa Δx_{pohj} leveysasteella $\Delta\varphi = \Delta x_{\text{pohj}}/M$ ja $\Delta x_{\text{itä}}$ pituusasteella $\Delta\lambda = \Delta x_{\text{itä}}/N \cos \varphi$.

Tämä tuottaa linearisoiduiksi derivaatoiksi

$$\frac{d}{dt}\Delta\varphi = \frac{1}{M}\Delta v_{\text{pohj}}, \quad \frac{d}{dt}\Delta\lambda = \frac{1}{N \cos \varphi^{(0)}}\Delta v_{\text{itä}} + \frac{v_{\text{itä}}^{(0)} \tan \varphi^{(0)}}{N \cos \varphi^{(0)}}\Delta\varphi.$$

$N(\varphi)$ ja $M(\varphi)$ ovat vertausellipsoidin poikittainen ja meridiaanin kaa-revuussäde: mekanisointi kelpaa jo vertausellipsoidin tarkkuustasolla. Jos korkeus merenpinnalta eroaa nolasta, se tulisi korvata arvoilla $N + h$ ja $M + h$, jossa h on korkeus vertausellipsoidin yläpuolella. Edellisessä derivoinnissa sivuutettiin molempien heikko riippuvuus leveysasteesta φ .

Hypätään kevyesti sen tosiseikan yli, että riippuen toteutuksesta todellisten vaakagyroskooppien ja kiihtyvyysmittareiden akselit eivät välttämättä osoita pohjoiseen ja itään.

Pohjois- ja itäsuuntien *kääntyminen* vaatii erityiskäsittelyä, kun mat-kustaa pituussuunnassa. Naiivisti nopeuden yhtälö 5.23 kirjoitettaisiin muotoon

$$\frac{dv_{\text{pohj}}}{dt} = \tilde{a}_{\text{pohj}} + g \theta_{\text{pohj}}, \quad \frac{dv_{\text{itä}}}{dt} = \tilde{a}_{\text{itä}} + g \theta_{\text{itä}},$$

¹⁷Jos kulman θ amplitudi on vaikkapa $A_\theta = 1' = 2,9 \cdot 10^{-4}$ rad, seuraa yhtälöstä

$$\frac{d\Delta v}{dt} = g\theta,$$

että

- Δv :n amplitudi on $A_{\Delta v} = g\sqrt{R/g} A_\theta = 2,3 \text{ m/s}$
- Δx :n amplitudi on $A_{\Delta x} = \sqrt{R/g} A_{\Delta v} = 1855 \text{ m}$.



mutta se olisi liian yksinkertainen. On olemassa lisätermiä:

$$\begin{aligned}\frac{dv_{\text{pohj}}}{dt} &= \tilde{a}_{\text{pohj}} + g \theta_{\text{pohj}} - v_{\text{itä}} \frac{d}{dt} \alpha, \\ \frac{dv_{\text{itä}}}{dt} &= \tilde{a}_{\text{itä}} + g \theta_{\text{itä}} + v_{\text{pohj}} \frac{d}{dt} \alpha,\end{aligned}$$

jossa α on suunta eli atsimuuttikulma laskettuna pohjoissuunnasta myötäpäivään. Kulmat θ_{pohj} ja $\theta_{\text{itä}}$ ovat kallistuskulmat pohjoiseen ja itään paikallisen luotiviivan suhteen, katso yhtälö 5.25. Kallistuskulmille löytyvät samanlaiset lisätermit ja lisäksi Maan pyörähdysliikkeen termi:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \theta_{\text{pohj}} &= -\frac{1}{M} \Delta v_{\text{pohj}} - \theta_{\text{itä}} \frac{d}{dt} \alpha, \\ \frac{d}{dt} \theta_{\text{itä}} &= -\frac{1}{N} \Delta v_{\text{itä}} + \theta_{\text{pohj}} \frac{d}{dt} \alpha - \omega_{\oplus} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Vastaavat deltayhtälöt ovat

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Delta \theta_{\text{pohj}} &= -\frac{1}{M} \Delta v_{\text{pohj}} - \Delta \theta_{\text{itä}} \frac{d}{dt} \alpha, \\ \frac{d}{dt} \Delta \theta_{\text{itä}} &= -\frac{1}{N} \Delta v_{\text{itä}} + \Delta \theta_{\text{pohj}} \frac{d}{dt} \alpha + \omega_{\oplus} \sin \varphi^{(0)} \Delta \varphi.\end{aligned}$$

Fuskataan hieman ja oletetaan atsimuutin muutos $\frac{d}{dt} \alpha = \dot{\alpha}$ tunnetuksi ja unohdetaan sen riippuvuus tilavektorin alkioista $v_{\text{itä}}$ ja φ .

Kahdessa ulottuvuudessa mekanisointiyhtälö on nyt seuraavan näköinen:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \\ \Delta v_{\text{pohj}} \\ \Delta v_{\text{itä}} \\ \Delta \theta_{\text{pohj}} \\ \Delta \theta_{\text{itä}} \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{\text{itä}} \tan \varphi & 0 & 0 & \frac{1}{N \cos \varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{\alpha} & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha} & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{M} & 0 & 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \omega_{\oplus} \sin \varphi & 0 & 0 & -\frac{1}{N} & \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ \dot{\alpha} \varphi & 0 & 0 & \frac{\tan \varphi}{N} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^F \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \\ \Delta v_{\text{pohj}} \\ \Delta v_{\text{itä}} \\ \Delta \theta_{\text{pohj}} \\ \Delta \theta_{\text{itä}} \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n} \\ 0 \\ 0 \\ \underline{n}_{a,\text{pohj}} \\ \underline{n}_{a,\text{itä}} \\ \underline{n}_{g,\text{pohj}} \\ \underline{n}_{g,\text{itä}} \\ \underline{n}_{g,\alpha} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Liki- eli vertausarvot, jotka integroidaan *tarkasti* ajassa, täyttävät¹⁸

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi^{(0)} \\ \lambda^{(0)} \end{bmatrix} (t) = \begin{bmatrix} v_{\text{pohj}}^{(0)} / M(\varphi^{(0)}) \\ v_{\text{itä}}^{(0)} / N(\varphi^{(0)}) \cos \varphi^{(0)} \end{bmatrix} (t),$$

¹⁸Mittasuureiden \tilde{a}_{pohj} ja $\tilde{a}_{\text{itä}}$ muodostus, kun oikeasti mitatut suureet ovat \tilde{a}_x ja \tilde{a}_y , edellyttää atsimuutin α tarkkaa tuntemista.



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{\text{pohj}}^{(0)} \\ v_{\text{itä}}^{(0)} \end{bmatrix} (t) &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{\text{pohj}} \\ \tilde{a}_{\text{itä}} \end{bmatrix} (t) + \begin{bmatrix} -v_{\text{itä}}^{(0)} \\ v_{\text{pohj}}^{(0)} \end{bmatrix} (t) \cdot \frac{d}{dt} \alpha(t), \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_{\text{pohj}}^{(0)} \\ \theta_{\text{itä}}^{(0)} \end{bmatrix} (t) &= \begin{bmatrix} -\theta_{\text{itä}}^{(0)} \\ \theta_{\text{pohj}}^{(0)} \end{bmatrix} (t) \cdot \frac{d}{dt} \alpha(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{\oplus} \cos \varphi^{(0)}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Suunnan eli atsimuutin yhtälö on

$$\frac{d}{dt} \alpha = \frac{\tan \varphi}{N(\varphi)} (v_{\text{itä}} + \omega_{\oplus} N(\varphi) \cos \varphi) = \frac{\tan \varphi}{N(\varphi)} v_{\text{itä}} + \omega_{\oplus} \sin \varphi, \quad (5.28)$$

joka sisältää Maan pyörahdyistä kuvaavan termin: vakautettu alusta on myös Foucault'n heiluri.

Likiarvoille pätee

$$\frac{d}{dt} \alpha^{(0)} = \frac{\tan \varphi^{(0)}}{N(\varphi)} v_{\text{itä}}^{(0)} + \omega_{\oplus} \sin \varphi^{(0)},$$

ja linearisoitu yhtälö on

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta \alpha &= \frac{\tan \varphi^{(0)}}{N(\varphi)} \Delta v_{\text{itä}} + \dot{\alpha}_{\varphi} \Delta \varphi, \\ \dot{\alpha}_{\varphi} &= \frac{v_{\text{itä}}^{(0)}}{N(\varphi) (\cos^{(0)} \varphi)^2} + \omega_{\oplus} \cos \varphi^{(0)}. \end{aligned}$$

Tämä saa kelvata esimerkkinä mekanisoinnin monimutkaisuudesta.

Käytännön sovelluksessa vain liki- eli vertaustila $x^{(0)}(t)$ integroidaan eksaktisti. Linearisoitua dynaamista mallia 5.27 ja kerroinmatriisia F käytetään vain tilavarianssin $\Sigma(t)$ laskemiseksi eteenpäin yhtälön 3.19 avulla. Ja tietenkin matriisia F käytetään linearisoidun tilaestimaattorin $\Delta x^{-}(t)$ laskemiseksi eteenpäin. Nämä deltat on pidettävä aina pieninä eli samankokoisina kuin tilavarianssin antamat epävarmuudet. Linearisointi on approksimointia, eikä yllä johdettu matriisi F ole eksakti.



5.10 Inertialaitteen alustus

Kiinnostavaa on, miten inertiamittausyksikkö *tasataan* ja *suunnataan* ennen matkaa. Paikallaan oltaessa inertialaitteen kiihtyvyysmittarit toimivat kallistusmittareina ja palautesilmukat voivat saada gyroskooppien akselit kääntymään vaakatasoon.

Pohjoissuunta voidaan saada käyttämällä laitetta *hyrräkompassin* tavoin eli tuntemalla, miten paikallisen painovoiman suunta kääntyy



hitaasti etelä-pohjoisakselin ympäri. Näin määritetään alkuatsimuutti $\alpha(t_0)$.

Sen jälkeen käytetään yhtälöä 5.28 suunnan $\alpha(t)$ laskennalliseksi seuraamiseksi lennon aikana. Tätä kutsutaan *vapaan atsimuutin* ratkaisuksi.

Vaihtoehtoisesti alkuatsimuutti $\alpha(t_0)$ voidaan nollata ja soveltaa lennossa vääntöä atsimuuttigyrokooppiin niin, että se ja alusta seuraavat pohjoista ja $\alpha(t)$ pysyy nollana. Tätä kutsutaan "*north-followingiksi*". Tarvittava kompensoiva vääntö on

$$N_y = L \frac{\frac{d}{dt} L_y}{L} = J_x \omega \left(-\frac{d}{dt} \alpha^{(0)} \right) = \\ = -J_x \omega \left(\frac{\tan \varphi^{(0)}}{N(\varphi)} v_{\text{itä}}^{(0)} + \omega_{\oplus} \sin \varphi^{(0)} \right).$$

Tässä oletetaan, että gyrokoopin pyörimisakseli on positiivinen x-akseli.

Lentokentillä näkee usein lähtöportin ulkopuolella taulun, johon on kirjoitettu sen tarkka ($\pm 0,1'$) maantieteellinen paikka. Itse asiassa näiden arvojen avulla voidaan alustaa koordinaatit inertialaitteessa, jota liikennelentokoneet käyttävät. Lähtöporttien koordinaatit löytyvät myös *Jeppeseniltä*. Inertialaitteen tasaus ja suuntaus pohjoiseen tapahtuu koneen seisomisen aikana.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on nollanopeuspäivitys?
- 2) Mitä kahta anturityyppiä esiintyy yleisesti inertiamittaussyksiköissä? Mitä ne mittaavat?
- 3) Alaviitteessä 5 sivulla 103 johdetaan Maan vapaan nutaation yhtälöt. Jos ratkaisuun sijoittaa arvot J_0 ja ΔJ kirjallisuudesta, saa jaksoksi noin 306 tähtivuorokautta. Tiedämme kuitenkin havainnoista, että Maan vapaan nutaation eli Chandlerin huojunnan jakso on noin 433 vuorokautta. Mistä ero lienee peräisin?
- 4) Mitkä kaksi inertiamittaussyksikön teknistä ratkaisua on olemassa?
- 5) Miten hyrräkompassi toimii?
- 6) Miten vakautettu alusta toimii? Mihin sitä käytetään?
- 7) Mikä on Schulerin heiluri?
- 8) Mitä tarkoitetaan inertiaalisen navigointilaitteen mekanisoinnilla?



- 9) Millä tavalla inertiamittausyksikkö alustetaan lentokoneessa ennen lentoa lähtöä tai avaruusaluksessa ennen laukaisua? Mitä kahta vektoria käytetään tätä varten? Missä kahdessa maapallon pisteessä tämä alustus epäonnistuisi?
- 10) Miksi ”north-following”-tyyppisen inertia-alustan käyttö voi olla ongelmallista navan yli lentävässä lentokoneessa?



Harjoitus 5 – 1: Tennismailalause

Todista tennismailalause eli väliakselilause käyttämällä Eulerin yhtälöitä 5.6 vapaasti pyörivälle kappaleelle kappaleen mukana pyörivissä koordinaateissa.



Harjoitus 5 – 2: Hyrräkompassin yhtälö

Yksinkertaisessa hyrräkompassin yhtälössä 5.16 oikealla puolella on miinusmerkki, ja yhtälön oikea puoli oletetaan siis negatiiviseksi. Miten hyrräkompassi käyttäytyisi, jos oikea puoli olisi positiivinen? Älä käytä approksimaatiota $\sin \alpha \approx \alpha$!



Harjoitus 5 – 3: Schulerin jakso

Näytä, että Schulerin jakso pallon muotoiselle taivaankappaleelle, jonka tiheys on homogeeninen, riippuu ainoastaan tästä tiheysarvosta.



Navigointi ja rataliike

6

Satelliittiratojen ja niiden geometrian ymmärrys on olennaista Kalmanin suotimen käytölle, kun navigoidaan avaruudessa tosiajassa tehtyjen havaintojen avulla. Yhtä välttämätöntä se on myös maanpäällisen GNSS-navigoinnin yhteydessä, kun lasketaan satelliittien paikat rata-alkioista ensin avaruudessa ja sen jälkeen navigaattorin paikallisella taivaalla.

Aihetta käsitellään laajemmin lähteissä Poutanen (2017), luku 5, ja Hofmann-Wellenhof ym. (1997), luku 4.

Tärkeää on myös kahden kiertävän kappaleen välisen suhteellisen dynamiikan ymmärtäminen. Mainittava tässä yhteydessä on Hillin (1886) lähestymistapa ja julkaisu Clohessy ja Wiltshire (1960), joita tullaan esittelemään.



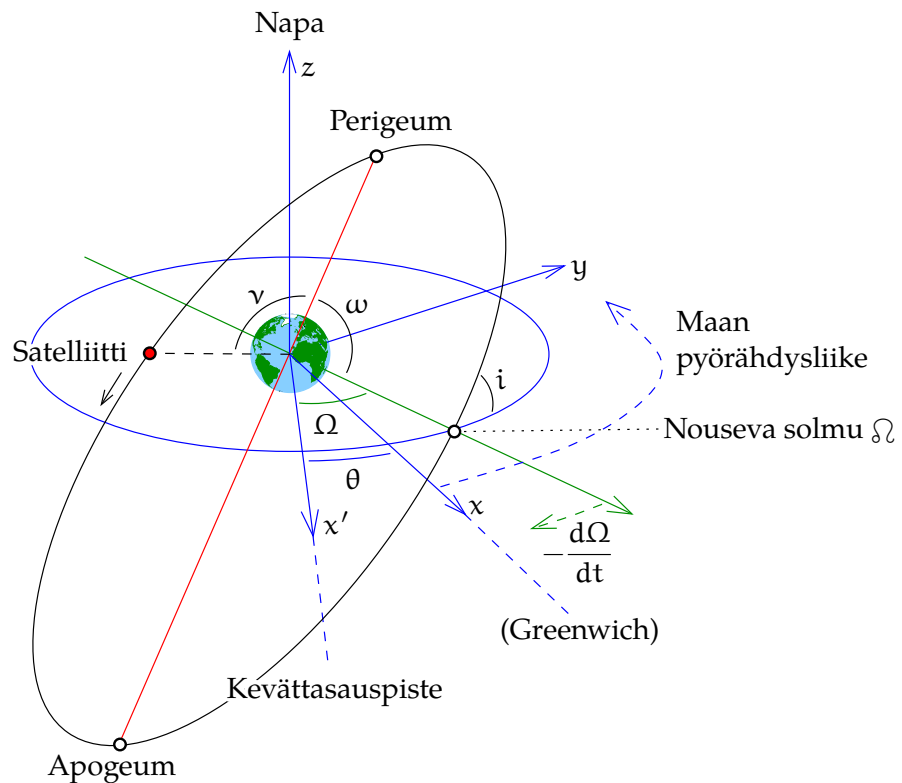
6.1 Keplerin rata

Jos oletetaan, että satelliitti liikkuu keskeisvoimakentässä — esimerkiksi massapisteen tai pallon muotoisen Maan pallosymmetrisessä vetovoimakentässä — seuraa, että satelliitin rata on *Keplerin rata*. Johannes Kepler (1571–1630) löysi hänen mukaansa nimetyt planeettojen rataliikkeen lait Tycho Brahen (1546–1601) Mars-planeetan laajan ja ennennäkemättömän tarkan havaintoaineiston perusteella ja mestarillisen analyysin tuloksena, katso [Physics Classroom](#), [Kepler's Three Laws](#).

Satelliitin liike voidaan kuvata vektoriytälöillä näin:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{v}, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{v} = -\frac{GM_{\oplus}}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}.$$

Tässä $\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ ovat satelliitin paikka- ja nopeusvektorit kolmiulotteisessa avaruudessa, jossa on määritelty



KUVA 6.1. Keplerin rata-alkiot avaruudessa.

ortonormaali kanta $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Yhdistetty abstrakti vektori

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\beta & \mathbf{v}_\beta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T$$

sovitulla kannalla β on kiertävän satelliitin muodostaman dynaamisen järjestelmän *tilavektori*.

Keplerin rata-alkiot ovat vain tilavektorin eri kirjoitustapa, joka perustuu tietoon, että kiertorata on eksentrisen tasoellipsi, jonka yhdessä polttopisteessä¹ vetävä kappale sijaitsee. [Wikipedia, Orbital elements](#) antaa hyvän kuvauksen.

Katso kuvat 6.1 ja 6.2. Keskianomalia M on pelkkä lineaarinen ajankulun mitta skaalattuna satelliitin kiertoaikaan eli periodiin P ja laskettuna sen perigeumin läpikulkuhetkestä t_P :

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \frac{t - t_P}{P}. \quad (6.3)$$

¹Ellipsillä on kaksi polttopistettä. Ellipsi voidaan määritellä pisteiden joukoksi, joiden etäisyyksien *summa* polttopisteisiin on vakio. Tämä merkitsee, että jos valonlähde laitetaan yhteen heijastavasta materiaalista tehdyn ellipsin polttopisteeseen, lähteen kuva tulee näkyviin toisessa polttopisteessä. Katso [Wikipedia, Dandelin spheres](#).





TAULU 6.1. Keplerin rata-alkiot.

- Ω nousevan solmun rektaskensio eli tähtitieteellinen pituus. Nouseva solmu on piste, jossa satelliitti lentää päiväntasaajan yli eteläiseltä pohjoiselle pallonpuoliskolle.
Pituuksien nollapiste on paikka tähtitaivaalla, jossa eläinratataso eli ekliptikataso ja päiväntasaajan taso kohtaavat (kevättasauspiste): kyseessä on Auringon paikka kevään alkaessa, kun Aurinko siirtyy eteläiseltä pohjoiselle pallonpuoliskolle.
- i inkliinaatio eli ratatason kaltevuuskulma päiväntasaajatasoon nähden. **GPS**-satelliittien ratatason kaltevuus on 55° .
- ω perigeumin argumentti. Kulmaetäisyys nousevan solmun ja satelliitin rataellipsin perigeumin välillä. Perigeum on piste, jossa satelliitti on radallaan lähimpänä maapalloa.
- a satelliittin rataellipsin isoakselin puolikas.
- e satelliittin rataellipsin eksentrisyys. $1 - e^2 = b^2/a^2$, jossa b on pikkuakselin puolikas.
- v, E, M kuvaavat satelliitin sijainnin radallaan ajan funktiona:
- $v(t)$ luonnollinen anomalia
 $E(t)$ eksentrisen anomalia
 $M(t)$ keskianomalia.
- Niiden väliset yhteydet ovat

$$E(t) = M(t) + e \sin E(t), \quad (6.1)$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}v(t)}{\tan \frac{1}{2}E(t)} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \quad (6.2)$$

E ja v taas ovat puhtaasti geometrisia suureita.

Kuvassa kulma θ on *Greenwichin tähtiaika*, joka kuvaa maapallon asentoa tähtitaivaaseen nähden. Greenwichin tähtiaika koostuu vuotuisesta ja vuorokautisesta osasta², jotka johtuvat Maan pyörähdys- ja

²Greenwichin tähtiaika lasketaan muutaman minuutin tarkkuudella seuraavasti:

- 1) Ota kuukausiarvo seuraavasta taulukosta:

tam	hel	maa	huh	tou	kes	hei	elo	syy	lok	mar	jou
6 38	8 40	10 30	12 33	14 31	16 33	18 31	20 34	22 36	0 34	2 36	4 35

- 2) Lisää tähän *neljä* minuuttia jokaista kuukauden päivää kohti.



eli

$$(1 - e^2) (r \cos \nu + ea)^2 + r^2 \sin^2 \nu = a^2 (1 - e^2).$$

Termien uudelleen järjestely antaa

$$\begin{aligned} & \left((1 - e^2) \cos^2 \nu + (1 - \cos^2 \nu) \right) r^2 + \left(2 (1 - e^2) ea \cos \nu \right) r + \\ & + \left((1 - e^2) e^2 a^2 - a^2 (1 - e^2) \right) = 0 \end{aligned}$$

eli

$$(1 - e^2 \cos^2 \nu) r^2 + \left(2 (1 - e^2) ea \cos \nu \right) r + \left(-a^2 (1 - e^2)^2 \right) = 0,$$

kvadraattinen yhtälö, jolla on standardiratkaisu. Diskriminantti on

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2 (1 - e^2) ea \cos \nu \right)^2 - 4 (1 - e^2 \cos^2 \nu) \left(-a^2 (1 - e^2)^2 \right) = \\ &= 4a^2 (1 - e^2)^2 \left((e \cos \nu)^2 + (1 - e^2 \cos^2 \nu) \right) = 4a^2 (1 - e^2)^2. \end{aligned}$$

Ratkaisu on

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-2 (1 - e^2) ea \cos \nu \pm \sqrt{\Delta}}{2 (1 - e^2 \cos^2 \nu)} = \\ &= \frac{-2a (1 - e^2) e \cos \nu \pm 2a (1 - e^2)}{2 (1 - e^2 \cos^2 \nu)} = \frac{a (1 - e^2) (\pm 1 - e \cos \nu)}{1 - e^2 \cos^2 \nu}. \end{aligned}$$

Näistä otetaan positiivinen ratkaisu:

$$r = \frac{a (1 - e^2) (1 - e \cos \nu)}{1 - e^2 \cos^2 \nu} = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}.$$

Voimme siis laskea satelliitin hetkellisen säteen

$$r(t) = a (1 - e \cos E(t)) = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos \nu(t)}.$$



6.1.2 Keskianomalioiden muuntaminen eksentrisiksi

Käytämme tähän Keplerin toista lakia eli alueiden lakia. Siinä sanotaan, että yhtä aikayksikköä kohti satelliitin sädevektori pyyhkäisee aina saman pinta-alan yli. Se on pyörähdysmomentin säilymisen erikoistapaus.

Katso taas kuva 6.3. Alueiden laki ei päde vain satelliitin S, vaan myös vastinpisteen P liikkeelle. Kaikki alueet ovat vain a/b kertaa suurempia. Tämä merkitsee, että sektorin PGB pinta-alan, kuvassa "I", on oltava $M/2\pi$ kertaa pienempi kuin koko ympyrän pinta-alan. Koko ympyrän pinta-ala on πa^2 . Siis

$$I = \frac{M}{2\pi} \pi a^2 = \frac{1}{2} a^2 M. \quad (6.5)$$



Samalla tavalla sektori PCB, joka koostuu alueista "I" ja "II", on pinta-alaltaan geometrisesti $E/2\pi$ kertaa pienempi kuin ympyrä. Siis

$$I + II = \frac{E}{2\pi} \pi a^2 = \frac{1}{2} a^2 E. \quad (6.6)$$

Lopuksi kolmion PCG pinta-ala on

$$II = \frac{1}{2} CG \cdot PQ = \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E = \frac{1}{2} a^2 e \sin E. \quad (6.7)$$

Näistä kolmesta tuloksesta 6.5, 6.6 ja 6.7 saadaan *Keplerin yhtälö* 6.1:

$$E = M + e \sin E,$$

josta E voidaan ratkaista iteratiivisesti, jos M on annettuna.



6.1.3 Eksentristen anomalioiden muuntaminen luonnollisiksi

Satelliitin x -koordinaatille pätee

$$x = r \cos v = a \cos E - ea \implies r \cos v = a (\cos E - e).$$

Puolikulmasijoitus

$$\cos v = 2 \cos^2 \frac{1}{2} v - 1$$

antaa

$$2r \cos^2 \frac{1}{2} v - r = a (\cos E - e)$$

eli yhtälön 6.4 kanssa

$$2r \cos^2 \frac{1}{2} v - a (1 - e \cos E) = a (\cos E - e)$$

eli

$$2r \cos^2 \frac{1}{2} v = a \left((\cos E - e) + (1 - e \cos E) \right) = a (1 - e) (\cos E + 1).$$

Toisen puolikulmasijoituksen

$$\cos E = 2 \cos^2 \frac{1}{2} E - 1$$

avulla tämä antaa

$$2r \cos^2 \frac{1}{2} v = 2a (1 - e) \cos^2 \frac{1}{2} E. \quad (6.8)$$

Samalla tavalla yhtälöiden

$$\cos v = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} v, \quad \cos E = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} E$$



käyttö antaa

$$\begin{aligned}
 r - 2r \sin^2 \frac{1}{2} \nu &= a (\cos E - e) \\
 \implies a (1 - e \cos E) - 2r \sin^2 \frac{1}{2} \nu &= a (\cos E - e) \\
 \implies -2r \sin^2 \frac{1}{2} \nu &= a ((\cos E - e) - (1 - e \cos E)) = \\
 &= a (1 + e) (\cos E - 1) = -2a (1 + e) \sin^2 \frac{1}{2} E \\
 \implies 2r \sin^2 \frac{1}{2} \nu &= 2a (1 + e) \sin^2 \frac{1}{2} E. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Jaetaan yhtälö 6.9 yhtälöllä 6.8 antaen

$$\tan^2 \frac{1}{2} \nu = \frac{1+e}{1-e} \tan^2 \frac{1}{2} E \implies \frac{\tan \frac{1}{2} \nu}{\tan \frac{1}{2} E} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

tulos 6.2.



6.1.4 Suorakulmaiset koordinaatit ja aikaderivaatat

Säteen r aikaderivaatta saadaan differentioimalla yhtälö 6.4:

$$\frac{dr}{dt} = ae \sin E \frac{dE}{dt}.$$

Keplerin yhtälöstä 6.1 saadaan

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dM}{dt} + e \cos E \frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{P} + e \cos E \frac{dE}{dt},$$

siis

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{P(1 - e \cos E)},$$

jossa P on kiertoaika eli periodi. Ratatasossa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a (\cos E - e) \\ b \sin E \end{bmatrix}.$$

Tämän differentiointi ajan suhteen antaa

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin E \\ b \cos E \end{bmatrix} \frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{P(1 - e \cos E)} \begin{bmatrix} -a \sin E \\ b \cos E \end{bmatrix}.$$

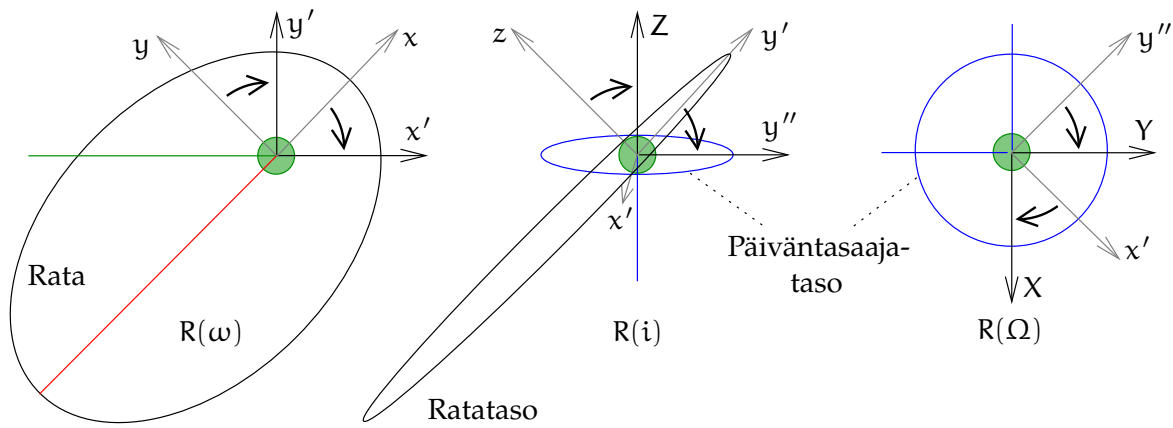


6.1.5 Muunnos geosentriseen koordinaatistoon

Löytyneet kaksiulotteiset vektorit ratatasossa voidaan muuntaa kolmiulotteisiksi vektoreiksi avaruudessa kiertokulmien ω , i ja Ω avulla. Jos kirjoitetaan ratatason kannalla α

$$\mathbf{x}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a (\cos E - e) \\ b \sin E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$





KUVA 6.4. R-matriisin johtaminen.

saadaan geosentrisellä kannalla β :

$$\mathbf{x}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\Omega, i, \omega) \mathbf{x}_\alpha,$$

jossa kiertomatriisi

$$\mathbf{R}(\Omega, i, \omega) = \mathbf{R}(\Omega) \mathbf{R}(i) \mathbf{R}(\omega), \quad \mathbf{R}(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6.11)

Yhteenvetona

$$\mathbf{R}(\Omega, i, \omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & \cos \Omega \cos \omega \cos i - \sin \Omega \sin \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}.$$

(6.12)

Katso kuva 6.4.

Näin saadut geosentriset koordinaatit ovat inertiaalisessa eli tähtitieteellisessä koordinaatistossa. Pituuksien origo on kevättasauspiste. Jos halutaan saada satelliitin koordinaatit maapallon mukana pyörivässä koordinaatistossa, jossa pituuksien origo on Greenwich, lasketaan



nousevan solmun pituus

$$\ell = \Omega - \theta, \quad (6.13)$$

jossa θ on Greenwichin tähtiaika. Laitetaan matriisiyhtälöön 6.12 nousevan solmun rektaskension Ω tilalle nousevan solmun pituus ℓ ja annetaan tuloksena olevalle matriisille nimi $R'(\ell, i, \omega)$.

Nopeusvektori saadaan differentioimalla ajan suhteen:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_\alpha = \frac{2\pi}{P(1 - e \cos E)} \begin{bmatrix} -a \sin E \\ b \cos E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

josta geosentrinen vastine seuraa:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_\beta = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \frac{d}{dt} \mathbf{x}_\alpha.$$

Tämä pätee inertiaalisissa koordinaateissa. Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, jonka kanta on β' , saadaan

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{\beta'} = R' \frac{d}{dt} \mathbf{x}_\alpha + \left(\frac{d}{dt} R' \right) \mathbf{x}_\alpha,$$

jossa $R'(\ell, i, \omega) = R'(\Omega - \theta, i, \omega)$ sisältää tähtiajan, yhtälö 6.13, ja riippuu siis ajasta:

$$\left| \begin{aligned} \frac{d}{dt} R' &= -\frac{d\theta}{dt} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} -\sin \ell \cos \omega - \cos \ell \sin \omega \cos i & \sin \ell \sin \omega - \cos \ell \cos \omega \cos i & \cos \ell \sin i \\ \cos \ell \cos \omega - \sin \ell \sin \omega \cos i & -\cos \ell \sin \omega - \sin \ell \cos \omega \cos i & \sin \ell \sin i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right|.$$



6.2 Hillin koordinaattien käyttö

G. W. Hill

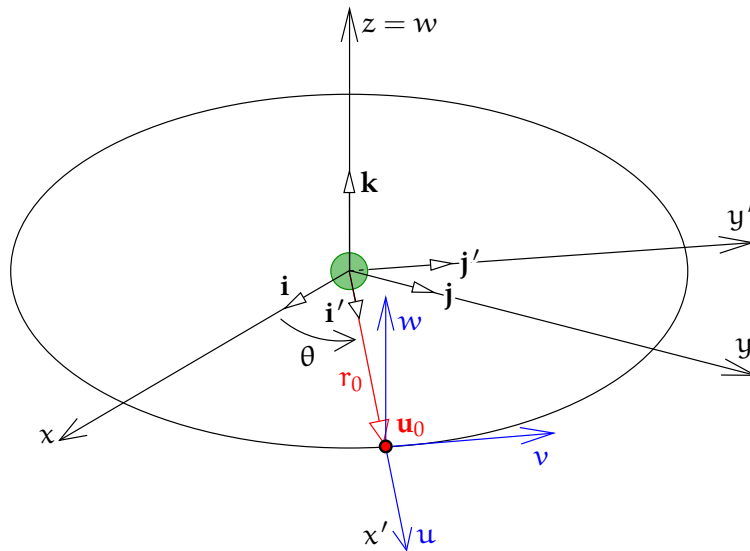
Hillin koordinaatiston keksi George W. Hill⁴ Kuun rataliikkeen tutkimuksen yhteydessä. Se korvaa tavallisen tavan kuvata rataliikettä inertiaalisessa koordinaatistossa (x, y, z) , jonka origo on liikkeen keskipiste eli Aurinko. Sen sijaan käytetään ei-inertiaalista, mukana liikkuvaa ja pyörivää koordinaatistoa (u, v, w) . Sen origo on Maan kohdalla⁵ ja

⁴George William Hill (1838–1914) oli amerikkalainen tähtitieteilijä, matemaatikko ja kolmen kappaleen ongelman tutkija. Kuun liike on klassinen kolmen kappaleen ongelma, jossa Maan ja Auringon vaikutukset ovat samaa suuruusluokkaa.

Hill oli yksinoloa arvostava henkilö, joka työskenteli mieluiten yksin ja teki uraauurtavaa työtään sukutilallaan Länsi-Nyackissa, New Yorkin osavaltiossa.

⁵Tarkemmin: Maan ja Kuun yhteisen massakeskipisteen kohdalla.





KUVA 6.5. Hillin koordinaatisto.

pyörii tasaisesti Maan keskimääräisellä kulmanopeudella Auringon ympäri, yhden kierron vuodessa. Koska Kuun ja Maan välinen etäisyys on vain 0,26 % Maan ja Auringon välisestä etäisyydestä, Auringon vaikutuksen matematiikka voidaan linearisoida tehokkaasti.

Menetelmän eräs variantti mallintaa Maan satelliitin liikettä kuvitteellisen pisteen suhteen, joka kiertää Maata ympyrän muotoisessa radassa, jonka periodi on sama kuin satelliitin. Tärkeä yksinkertaistus verrattuna alkuperäiseen sovellukseen on, että kuvitteellisella pisteellä, toisin kuin maapallolla, ei ole omaa vetovoimaa. Tämä lähestymistapa on ollut hyödyllinen tutkittaessa ratahäiriöitä ja *rendezvous*-ongelmaa.

Kirjoitetaan kuvan 6.5 mukaan

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_0. \quad (6.15)$$

Kehitetään vektorit komponentteihin:

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x \cos \theta + y \sin \theta) \mathbf{i}' + (y \cos \theta - x \sin \theta) \mathbf{j}' + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i}' + v\mathbf{j}' + w\mathbf{k},$$

$$\mathbf{u}_0 = r_0\mathbf{i}'.$$

Muodostetaan abstraktit komponenttivektorit kannalla $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$



ja kannalla $\beta' \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{x}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\beta'} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{0,\beta'} = \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöstä 6.15 tulee

$$\mathbf{R}\mathbf{x}_{\beta} = \mathbf{x}_{\beta'} = \mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}, \quad (6.16)$$

jossa matriisi \mathbf{R} edustaa koordinaatiston kiertoa z -akselin ympärillä kulmamäärällä θ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektori \mathbf{x}_{β} koostuu komponenteista inertiaalisessa koordinaatistossa ja vektori $\mathbf{u}_{\beta'}$ komponenteista koordinaatistossa, joka kiertää satelliitin mukana. \mathbf{i}' - eli u -akseli osoittaa ulospäin eli "ylös", \mathbf{j}' - eli v -akseli eteenpäin lentosuunnassa ja \mathbf{k} - eli w - eli z -akseli kohtisuoraan ulos ratatasosta "paapuuuriin". (u, v, w) -koordinaatiston origo liikkuu vakionopeudella ympyräradalla: kulmanopeus on Keplerin kolmannen lain mukaan

$$n = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_0^3}}.$$

r_0 on radan säde ja samalla (u, v, w) -koordinaatiston origon etäisyys (x, y, z) -koordinaatiston origosta.

Yhtälö 6.16 voidaan kääntää:

$$\mathbf{x}_{\beta} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}) = \mathbf{R}^T (\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}),$$

koska ortogonaaliselle matriisille $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \iff \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.



6.3 Muunnos inertiaalisen ja Hillin koordinaatiston välillä

Johdetaan yhtälöt vektorin \mathbf{x} ja matriisin \mathbf{R} ensimmäiselle ja toiselle aika-derivaatalle ja sijoitetaan ne. Sen jälkeen kerrotaan yhtälön molemmat puolet vasemmalta matriisilla \mathbf{R} .

Differentioimalla Leibnizin tulosäännöllä saadaan

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\beta} &= \dot{\mathbf{R}}^T (\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}) + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{u}}_{\beta'}, \\ \ddot{\mathbf{x}}_{\beta} &= \ddot{\mathbf{R}}^T (\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}) + 2\dot{\mathbf{R}}^T \dot{\mathbf{u}}_{\beta'} + \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{u}}_{\beta'}. \end{aligned}$$



Kiertomatriisin R derivaatat saadaan ketjusäännön avulla:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n,$$

$$\ddot{R} = \frac{d^2 R}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n^2.$$

Sijoitus antaa

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\dot{R}^T} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} +$$

$$+ 2n \overbrace{\begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\dot{R}^T} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} +$$

$$+ \overbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{R^T} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}.$$

Kertomalla vasemmalta matriisilla R saadaan

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = n^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} +$$

$$+ 2n \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$



6.4 Keskeisvoimakentän sarjakehitelmä

Keskeisvoimakentän yhtälö (x, y, z) -koordinaatistossa on

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{GM_{\oplus}}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x} \implies R\ddot{\mathbf{x}}_{\beta} = -\frac{GM_{\oplus}}{\|\mathbf{x}\|^3} R\mathbf{x}_{\beta} = -\frac{GM_{\oplus}}{\|\mathbf{x}\|^3} (\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}),$$



komponentteittain:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \\ &= -\frac{GM_{\oplus}}{\|\mathbf{x}\|^3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{GM_{\oplus}}{\|\mathbf{x}\|^3} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}\| = \sqrt{(u + r_0)^2 + v^2 + w^2}.$$

Taylorin kehitelmä (u, v, w) -koordinaatiston origon ympäri antaa

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{GM_{\oplus}}{r_0^3} \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{M}_{\beta'}^{(0)} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

jossa *gravitaatiogradienttitensorin* matriisi $\mathcal{M}^{(0)}$ koostuu osittaisderivaatoista

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\beta'}^{(0)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \end{bmatrix} \left(-\frac{GM_{\oplus}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{u}_0\|^3} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) \Big|_{u,v,w=0} = \\ &= -\frac{GM_{\oplus}}{r_0^3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

yhtälö 3.9 laskettuna pisteessä \mathbf{u}_0 .

Keplerin kolmannen lain mukaan

$$\frac{GM_{\oplus}}{r_0^3} = n^2.$$

Yhdistämällä saadaan

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \\ &= -n^2 \left(\begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right). \quad (6.18) \end{aligned}$$





6.5 Liiketyhtälöt Hillin koordinaatistossa

Yhdistämällä yhtälöt 6.17 ja 6.18 saadaan ulkopuolisten voimien puuttuessa:

$$0 = n^2 \left(\begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) + \\ + n^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} + \\ + 2n \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}.$$

Yksinkertaistaminen antaa

$$0 = n^2 \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + 2n \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}.$$

Lopputuloks saadaan poimimalla erikseen yhtälöt komponenteille u , v ja w ⁶:

$$\ddot{u} = 2n\dot{v} + 3n^2u, \quad \ddot{v} = -2n\dot{u}, \quad \ddot{w} = -n^2w,$$

joissa kolmas tunnistetaan klassiseksi harmoniseksi värähtelijäksi.



6.6 Hillin yhtälöiden ratkaiseminen



6.6.1 Koordinaatin w yhtälö

Ensimmäiseksi ratkaistaan helpoin eli kolmas yhtälö,

$$\ddot{w} = -n^2w.$$

Kokeillaan yleistä jaksollista ratkaisua,

$$w(t) = A \sin(Bt + C).$$

⁶Tässä nähdään pyörivän koordinaatiston pseudovoimat, erityisesti coriolisvoiman termit $2n\dot{v}$ ja $-2n\dot{u}$, jotka riippuvat nopeudesta. Keskipakoisvoima on hieman piilossa, n^2u . Loput $2n^2u$ ja $-n^2w$ ovat keskeiskentän gravitaatiogradientteja.

Differentiointi kahdesti ja sijoitus antaa

$$-AB^2 \sin(Bt + C) = -n^2 A \sin(Bt + C) \implies B = \pm n.$$

Siis ratkaisu on

$$w(t) = A \sin(\pm nt + C),$$

jossa A ja C ovat mielivaltaisia vakioita. Sinin summakaavan

$$\sin(\pm nt + C) = \sin(\pm nt) \cos C + \cos(\pm nt) \sin C$$

avulla saadaan

$$w(t) = A_1 \sin nt + A_2 \cos nt,$$

jossa $A_1 = \pm A \cos C$ ja $A_2 = A \sin C$ ovat taas mielivaltaisia vakioita.

Nopeus saadaan differentioimalla:

$$\dot{w}(t) = nA_1 \cos nt - nA_2 \sin nt.$$

Tilansiirto ajasta t_0 aikaan $t_1 = t_0 + \Delta t$:

$$\begin{aligned} w(t_1) &= A_1 \sin n(t_0 + \Delta t) + A_2 \cos n(t_0 + \Delta t) = \\ &= A_1 (\sin nt_0 \cos n\Delta t + \cos nt_0 \sin n\Delta t) + \\ &\quad + A_2 (\cos nt_0 \cos n\Delta t - \sin nt_0 \sin n\Delta t) = \\ &= (A_1 \sin nt_0 + A_2 \cos nt_0) \cos n\Delta t + \\ &\quad + (A_1 \cos nt_0 - A_2 \sin nt_0) \sin n\Delta t = \\ &= w(t_0) \cos n\Delta t + \frac{1}{n} \dot{w}(t_0) \sin n\Delta t, \\ \dot{w}(t_1) &= nA_1 \cos n(t_0 + \Delta t) - nA_2 \sin n(t_0 + \Delta t) = \\ &= nA_1 (\cos nt_0 \cos n\Delta t - \sin nt_0 \sin n\Delta t) - \\ &\quad - nA_2 (\sin nt_0 \cos n\Delta t + \cos nt_0 \sin n\Delta t) = \\ &= n(A_1 \cos nt_0 - A_2 \sin nt_0) \cos n\Delta t - \\ &\quad - n(A_1 \sin nt_0 + A_2 \cos nt_0) \sin n\Delta t = \\ &= \dot{w}(t_0) \cos n\Delta t - n w(t_0) \sin n\Delta t. \end{aligned}$$

Matriisiyhtälönä:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} w \\ \dot{w} \end{bmatrix}}^{x(t_1)}(t_1) = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos n\Delta t & \sin n\Delta t/n \\ -n \sin n\Delta t & \cos n\Delta t \end{bmatrix}}^{\Phi_0^1} = \overbrace{\begin{bmatrix} w \\ \dot{w} \end{bmatrix}}^{x(t_0)}(t_0). \quad (6.19)$$



**6.6.2 Koordinaattien u ja v yhtälöt**

$$\ddot{u} = 2n\dot{v} + 3n^2u, \quad \ddot{v} = -2n\dot{u}. \quad (6.20)$$

Ne on ratkaistava yhdessä. Kokeilkaamme taas jaksollista ratkaisua:

$$u(t) = A \sin nt + B \cos nt, \quad v(t) = C \sin nt + D \cos nt. \quad (6.21)$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned} -n^2 (A \sin nt + B \cos nt) &= \\ &= 2n \cdot n (C \cos nt - D \sin nt) + 3n^2 (A \sin nt + B \cos nt), \\ -n^2 (C \sin nt + D \cos nt) &= -2n \cdot n (A \cos nt - B \sin nt). \end{aligned}$$

Tarkastele erikseen sini- ja kosinitermejä ja ilmaise C ja D kertoimiin A ja B :

$$\begin{aligned} -n^2 A &= -2n^2 D + 3n^2 A, & -n^2 B &= 2n^2 C + 3n^2 B, \\ -n^2 C &= 2n^2 B, & -n^2 D &= -2n^2 A, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} -A &= -2D + 3A, & -B &= 2C + 3B, \\ -C &= 2B \implies C = -2B, & -D &= -2A \implies D = 2A. \end{aligned}$$

Sijoitus yhtälöihin 6.21 antaa yleisen ratkaisun

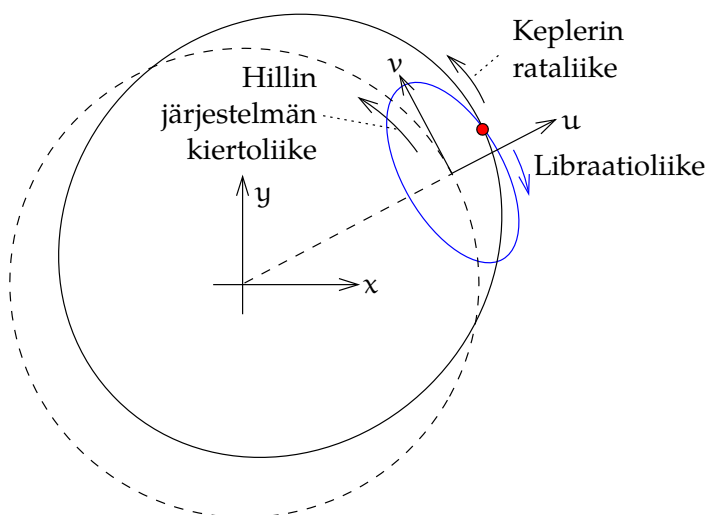
$$u(t) = A \sin nt + B \cos nt, \quad v(t) = -2B \sin nt + 2A \cos nt.$$

Matriisiyhtälönä:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -2B & 2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin nt \\ \cos nt \end{bmatrix}.$$

Tätä ratkaisua kutsutaan *libraatioliikkeeksi*, kuva 6.6. Se on jaksollinen liike, jonka keskipiste on Hillin koordinaatiston origo $u = v = 0$.

Inertiaalisessa koordinaatistossa satelliitti on elliptisellä Keplerin kiertoradalla origon $x = y = 0$ ympäri. Hillin ratkaisun periodi on $2\pi/n$, eli sama kuin Keplerin radan periodi.



KUVA 6.6. Libraatioliike.



6.7 Toinen ratkaisu

Tämä ei ole kuitenkaan tarinan loppu. Kokeillaan vaihteeksi *lineaarista*, ei-jaksollista ratkaisua:

$$u(t) = Et + F, \quad v(t) = Gt + H.$$

Sijoitetaan tämä alkuperäisiin differentiaaliyhtälöihin 6.20 ja lasketaan E ja G F:n ja H:n funktioina:

$$0 = 2nG + 3n^2(Et + F), \quad 0 = -2nE,$$

josta

$$E = 0, \quad G = -\frac{3}{2}nF.$$

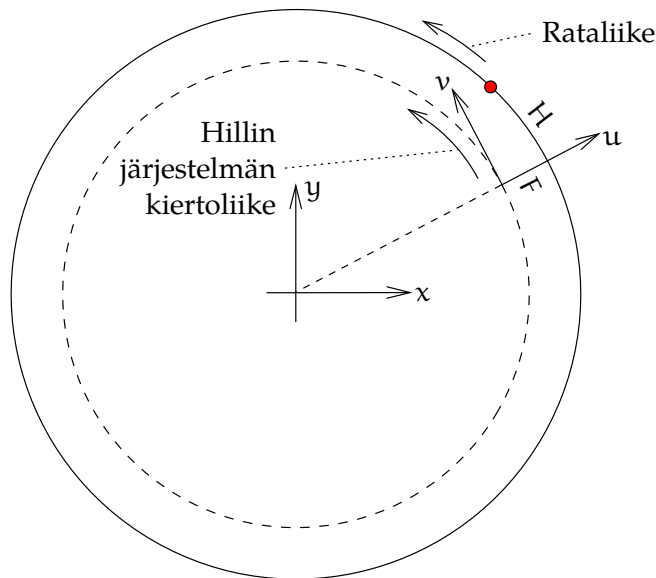
Ratkaisu on

$$u(t) = F, \quad v(t) = -\frac{3}{2}Fnt + H,$$

joissa F ja H ovat mielivaltaisia vakioita. Tämä edustaa *rataliikettä*, jonka *periodi on eri kuin* $2\pi/n$. Radan säde on $r_0 + F$, radan kulmanopeus $n - \frac{3}{2}Fn$ (Keplerin kolmas laki!) ja satelliitti on hetkellä $t = 0$ radallaan (u, v, w) -koordinaatiston origon edellä etäisyyden H verran. Katso kuva 6.7.

Yhtälöryhmän lineaarisuuden perusteella saamme vapaasti yhdistellä löytyneitä ratkaisuja.





KUVA 6.7. Lineaarinen ajelehtiminen, jos satelliitin periodi eroaa Hillin koordinaatiston periodista.



6.8 Tilansiirtomatriisi



6.8.1 Yleinen tapaus

Katsotaan vain (u, v) -tasoa. Yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} u(t) &= A \sin nt + B \cos nt + F, \\ v(t) &= -2B \sin nt + 2A \cos nt - \frac{3}{2}Fnt + H. \end{aligned}$$

Differentioimalla saadaan myös nopeuskomponentit:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= nA \cos nt - nB \sin nt, \\ \dot{v}(t) &= -2nA \sin nt - 2nB \cos nt - \frac{3}{2}Fn. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan alkuepookille t_0 :

$$u(t_0) = A \sin nt_0 + B \cos nt_0 + F = S(t_0) + F, \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} v(t_0) &= -2B \sin nt_0 + 2A \cos nt_0 - \frac{3}{2}Fnt_0 + H = \\ &= 2C(t_0) - \frac{3}{2}Fnt_0 + H, \end{aligned}$$

$$\dot{u}(t_0) = nA \cos nt_0 - nB \sin nt_0 = nC(t_0), \quad (6.23)$$

$$\dot{v}(t_0) = -2nA \sin nt_0 - 2nB \cos nt_0 - \frac{3}{2}Fn = -2nS(t_0) - \frac{3}{2}Fn. \quad (6.24)$$

Tässä käytettiin määritelmiä

$$S(t) \stackrel{\text{def}}{=} A \sin nt + B \cos nt, \quad C(t) \stackrel{\text{def}}{=} A \cos nt - B \sin nt.$$



Kirjoitetaan epookille t_1 soveltamalla sinin ja kosinin summakaavoja:

$$\begin{aligned}
 u(t_1) &= u(t_0 + \Delta t) = \\
 &= A \sin n(t_0 + \Delta t) + B \cos n(t_0 + \Delta t) + F = \\
 &= A \sin nt_0 \cos n\Delta t + A \cos nt_0 \sin n\Delta t + \\
 &\quad + B \cos nt_0 \cos n\Delta t - B \sin nt_0 \sin n\Delta t + F = \\
 &= \cos(n\Delta t) \cdot \mathcal{S}(t_0) + \sin(n\Delta t) \cdot \mathcal{C}(t_0) + F = \\
 &= u(t_0) + (\cos n\Delta t - 1) \mathcal{S}(t_0) + \sin(n\Delta t) \mathcal{C}(t_0).
 \end{aligned}$$

Samalla tavalla

$$\begin{aligned}
 v(t_1) &= 2A \cos n(t_0 + \Delta t) - 2B \sin n(t_0 + \Delta t) - \frac{3}{2}Fnt_1 + H = \\
 &= 2A \cos nt_0 \cos n\Delta t - 2A \sin nt_0 \sin n\Delta t - \\
 &\quad - 2B \sin nt_0 \cos n\Delta t - 2B \cos nt_0 \sin n\Delta t - \frac{3}{2}Fnt_1 + H = \\
 &= \cos(n\Delta t) \cdot (2A \cos nt_0 - 2B \sin nt_0) - \\
 &\quad - \sin(n\Delta t) \cdot (2A \sin nt_0 + 2B \cos nt_0) - \frac{3}{2}Fnt_1 + H = \\
 &= v(t_0) + 2(\cos n\Delta t - 1) \mathcal{C}(t_0) - 2 \sin(n\Delta t) \mathcal{S}(t_0) - \frac{3}{2}Fn\Delta t.
 \end{aligned}$$

Sijoita yhtälö 6.22, $F = u(t_0) - \mathcal{S}(t_0)$, tähän. Tuloksena

$$\begin{aligned}
 v(t_1) &= v(t_0) + 2(\cos n\Delta t - 1) \mathcal{C}(t_0) - 2 \sin(n\Delta t) \mathcal{S}(t_0) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}u(t_0)n\Delta t + \frac{3}{2}\mathcal{S}(t_0)n\Delta t = \\
 &= v(t_0) + 2(\cos n\Delta t - 1) \mathcal{C}(t_0) + \\
 &\quad + \left(\frac{3}{2}n\Delta t - 2 \sin n\Delta t\right) \mathcal{S}(t_0) - \frac{3}{2}u(t_0)n\Delta t.
 \end{aligned}$$

Seuraavaksi nopeudet:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}(t_1) &= nA(\cos nt_0 \cos n\Delta t - \sin nt_0 \sin n\Delta t) - \\
 &\quad - nB(\sin nt_0 \cos n\Delta t + \cos nt_0 \sin n\Delta t) = \\
 &= \cos(n\Delta t) \cdot (nA \cos nt_0 - nB \sin nt_0) - \\
 &\quad - \sin(n\Delta t) \cdot (nA \sin nt_0 + nB \cos nt_0) = \\
 &= \cos(n\Delta t) \cdot n\mathcal{C}(t_0) - \sin(n\Delta t) \cdot n\mathcal{S}(t_0)
 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
 \dot{v}(t_1) &= -2nA \cdot (\sin nt_0 \cos n\Delta t + \cos nt_0 \sin n\Delta t) - \\
 &\quad - 2nB \cdot (\cos nt_0 \cos n\Delta t - \sin nt_0 \sin n\Delta t) - \frac{3}{2}Fn = \\
 &= \cos(n\Delta t) \cdot (-2nA \sin nt_0 - 2nB \cos nt_0) + \\
 &\quad + \sin(n\Delta t) \cdot (-2nA \cos nt_0 + 2nB \sin nt_0) - \frac{3}{2}Fn = \\
 &= \dot{v}(t_0) - (\cos n\Delta t - 1) \cdot 2n\mathcal{S}(t_0) - 2 \sin(n\Delta t) \cdot n\mathcal{C}(t_0).
 \end{aligned}$$



Määritellään merkintätapa

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sin n\Delta t, \quad c \stackrel{\text{def}}{=} \cos n\Delta t.$$

Yhteenveto:

$$u(t_1) = u(t_0) + (c - 1) \mathcal{S}(t_0) + s \mathcal{C}(t_0),$$

$$v(t_1) = v(t_0) + 2(c - 1) \mathcal{C}(t_0) + \left(\frac{3}{2}n\Delta t - 2s\right) \mathcal{S}(t_0) - \frac{3}{2}u(t_0)n\Delta t,$$

$$\dot{u}(t_1) = nc\mathcal{C}(t_0) - ns\mathcal{S}(t_0),$$

$$\dot{v}(t_1) = \dot{v}(t_0) - 2n(c - 1) \mathcal{S}(t_0) - 2ns\mathcal{C}(t_0).$$

Eliminoi \mathcal{S} yhdistämällä yhtälöt 6.22 ja 6.24:

$$\frac{3}{2}nu(t_0) + \dot{v}(t_0) = -\frac{1}{2}n\mathcal{S}(t_0).$$

Tästä ja yhtälöstä 6.23:

$$\mathcal{S}(t_0) = -\left(3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0)\right), \quad \mathcal{C}(t_0) = \frac{\dot{u}(t_0)}{n}.$$

Sijoitus antaa

$$u(t_1) = u(t_0) - (c - 1) \left(3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0)\right) + \frac{s}{n} \cdot \dot{u}(t_0),$$

$$\begin{aligned} v(t_1) &= v(t_0) + \frac{2(c - 1)}{n} \dot{u}(t_0) - \\ &\quad - \left(\frac{3}{2}n\Delta t - 2s\right) \cdot \left(3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0)\right) - \frac{3}{2}u(t_0)n\Delta t = \\ &= v(t_0) + \frac{2(c - 1)}{n} \dot{u}(t_0) - (6n\Delta t - 6s) u(t_0) - \frac{3n\Delta t - 4s}{n} \dot{v}(t_0), \end{aligned}$$

$$\dot{u}(t_1) = c\dot{u}(t_0) + s(3nu(t_0) + 2\dot{v}(t_0)),$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t_1) &= \dot{v}(t_0) + (c - 1)(6nu(t_0) + 4\dot{v}(t_0)) - 2s\dot{u}(t_0) = \\ &= 6n(c - 1)u(t_0) - 2s\dot{u}(t_0) + (4c - 3)\dot{v}(t_0). \end{aligned}$$

Matriisiyhtälönä:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t_1)}(t_1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 4 - 3c & 0 & s/n & -2(c - 1)/n \\ 6s - 6n\Delta t & 1 & 2(c - 1)/n & 4s/n - 3\Delta t \\ 3ns & 0 & c & 2s \\ 6n(c - 1) & 0 & -2s & 4c - 3 \end{bmatrix}}^{\Phi_0^1} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t_0)}(t_0). \quad (6.25)$$

Tämä tilansiirtomatriisi yhdessä yhtälön 6.19 kanssa w -koordinaatille tunnetaan nimellä "Clohessyn ja Wiltshiren malli", **Clohessy ja Wiltshire** (1960).



Yhtälö 6.25 voidaan kirjoittaa osioituna kannalla β' :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_1) &= (\Phi_{11})_0^1 \mathbf{u}(t_0) + (\Phi_{12})_0^1 \dot{\mathbf{u}}(t_0), \\ \dot{\mathbf{u}}(t_1) &= (\Phi_{21})_0^1 \mathbf{u}(t_0) + (\Phi_{22})_0^1 \dot{\mathbf{u}}(t_0), \end{aligned}$$

jossa esimerkiksi

$$(\Phi_{11})_0^1 = \begin{bmatrix} 4 - 3 \cos(n\Delta t) & 0 \\ 6 \sin(n\Delta t) - 6n\Delta t & 1 \end{bmatrix}.$$



6.8.2 Tapaus pieni Δt

Kirjoitetaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä

$$\ddot{u} = 2n\dot{v} + 3n^2u, \quad \ddot{v} = -2n\dot{u}$$

ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}.$$

Pienelle aikaerolle⁷ Δt :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}(t_1) &\approx \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}(t_0) + \Delta t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}(t_0) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 3n^2\Delta t & 0 & 1 & 2n\Delta t \\ 0 & 0 & -2n\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}(t_0). \end{aligned}$$

Voidaan tarkistaa alkio alkioilta, että tämä on sama tulos kuin yhtälö 6.25, sijoituksilla $c = \cos n\Delta t \approx 1$ ja $s = \sin n\Delta t \approx n\Delta t$.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mitkä ovat Keplerin kolme planeettojen liikelakia?

⁷"Pieni" rataperiodin suhteen, siis $n\Delta t \ll 1$.

- 2) Mitkä ovat kuusi Keplerin rata-alkiota?
- 3) Mitä kolmea vaihtoehtoista rata-alkiota käytetään kuvaamaan satelliitin sijaintia kiertoradalla?
- 4) Mitkä ovat Hillin koordinaatit?
- 5) Kuvaile libraatioliike, joka oli Hillin yhtälöiden eräs ratkaisu, ja sen yhteys Keplerin kiertorataan.
- 6) Kirjoita auki kolme muuta Clohessyn ja Wiltshiren mallin 6.25 tilansiirtomatriiseja $(\Phi_{12})_0^1$, $(\Phi_{21})_0^1$ ja $(\Phi_{22})_0^1$.



Harjoitus 6 – 1: Keplerin rata

- 1) Johda Keplerin tilavektorin dynaaminen malli. Olettaen että voimakenttä on keskeiskenttä, kirjoita auki seuraava linearisoitu dynaaminen malliyhtälö:

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{a} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{a},$$

jossa $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & e & M & i & \omega & \Omega \end{bmatrix}^T$. Alkuperäinen epälineaarinen malli tulee linearisoida valitsemalla sopivia likiarvoja $\mathbf{a}^{(0)}(t)$, jotka saadaan tarkalla integroinnilla alkuarvosta $\mathbf{a}^{(0)}(t_0)$ ratamekaniikkaa käyttäen. Deltasuureet liittyvät niihin. Tarvitaan myös Keplerin kolmatta lakia:

$$GM_{\oplus}P^2 = 4\pi^2 a^3,$$

jossa P on radan kiertoaika eli periodi.

- 2) Maapallon litistyneisyyden takia radan nousevan solmun rektaskensio Ω muuttuu hitaasti seuraavan yhtälön mukaan:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a^3}}\left(\frac{a_{\oplus}}{a}\right)^2 J_2 \cos i. \quad (6.26)$$

Tämä on pitkäaikainen keskiarvo. Oletettu on ympyrän muotoinen rata eli eksentrisyys $e \approx 0$. a_{\oplus} on maapallon päiväntasaajasäde ja J_2 niin sanottu dynaaminen litistyneisyys, joka on dimensioton luku.

Miten tämä vaikuttaa yllä johdettuun dynaamisen mallin matriisiin \mathbf{F} ?

- 3) Onko sallittua käyttää yhtälöä 6.26 liki- eli vertausarvon $\Omega^{(0)}(t)$ ajallisen kehityksen laskentaan?



- 4) Johdettiin yhteydet 6.10, 6.11 ja 6.14 ratatason koordinaattien ja nopeuskomponenttien ja rata-alkioiden välillä:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a (\cos E - e) \\ b \sin E \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{P(1 - e \cos E)} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \sin E \\ b \cos E \end{bmatrix}.$$

Linearisoi yhteys tilavektorien

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \Delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta e \\ \Delta \omega \\ \Delta E \end{bmatrix}$$

välillä. Muista $b = a\sqrt{1 - e^2}$ ja Keplerin kolmas laki.

- 5) Keskeisvoimakentässä, jos kirjoitetaan suorakulmaiselle tilavektorille

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi_0^1 \mathbf{x}(t_0),$$

ilmaise matriisi Φ_0^1 likimäärin sarjakehitelmänä, jos $\Delta t = t_1 - t_0$ on pieni.

Vihje Lue alaosio 3.4.2 uudelleen ja muista, että tilavektori sisältää _____ deltasuureet, jotka on saatu vähentämällä likiarvot.

- 6) *Havaintoasema*. Miten mallinnetaan havaintoaseman kolmiulotteisen rata

$$\begin{bmatrix} X(t) & Y(t) & Z(t) \end{bmatrix}^T$$

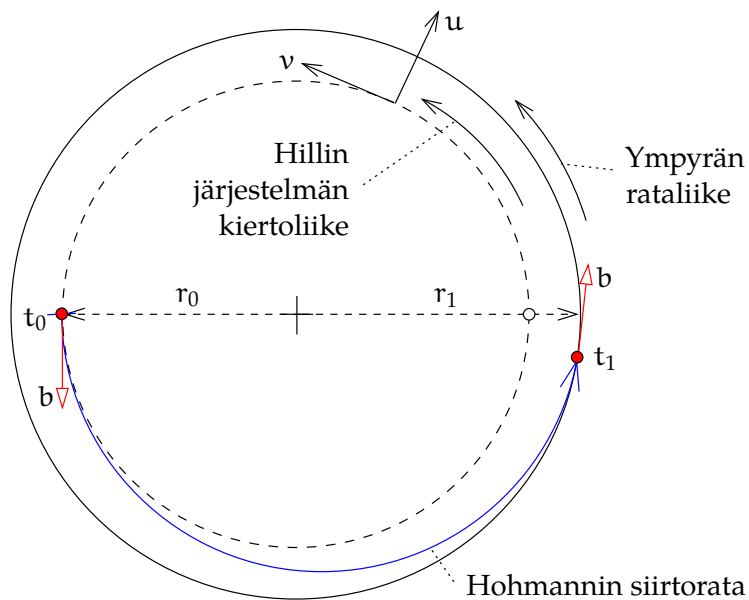
inertiaalisissa koordinaateissa maapallon pyörähdysliikkeen takia? Olettaen, että Maan pyörähdysliike on säännöllinen ja aseman sijainti kiinteä⁸, kirjoita havaintoaseman koordinaattien dynaamisen malli.



Harjoitus 6 – 2: *Rendezvous*

Tutkitaan kahden aluksen niin sanottu *rendezvous*-tilanne. Molemmat alukset ovat ympyräradalla, mutta saaliin rata on korkeampi. Tässä har-

⁸Siis unohda napaliike ja päivän pituuden vaihtelut, kiinteän Maan vuoksi, laatta-tektoniikka, jääkauden jälkeinen isostaattinen palautusliike ja niin edelleen. Lyhyesti sanottuna: unohda geodynamiikka.



KUVA 6.8. Rendezvous ja Hohmannin siirtorata.

joituksessa tutkitaan rakettivoiman käyttöä pyöreän kiertoradan muuttamiseksi ensin elliptiseksi Hohmannin⁹ siirtoradaksi, jonka apogeum on saaliin kiertoradalla. Puolen periodin jälkeen apogeumissa käytetään rakettivoimaa kiertoradan muuttamiseksi takaisin ympyräradaksi.

Yksinkertaisuuden vuoksi unohdetaan kolmas koordinaatti w .

- 1) Erikoista tilansiirtoyhtälö 6.25 siihen tapaukseen, että $n\Delta t = \pi$.
- 2) Jos on annettuna alkuepookin t_0 paikkakoordinaatit

$$\mathbf{u}(t_0) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t_0) = 0,$$

yksinkertaista yhtälö. Mitkä sarakkeet voidaan poistaa?

- 3) Jos lisäksi on annettuna ($b = \text{"boost"}$, rakettivoiman työntö eli nopeuden muutos):

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} (t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},$$

mikä arvo $u(t_1)$ ja etäisyys $r_1 = r_0 + u(t_1)$ vetovoiman keskuksesta on saavutettavissa tällä työllä? Yksinkertaista yhtälö vielä lisää.

⁹Walter Hohmann (1880–1945) oli saksalainen insinööri ja teoreettisen astronautiikan pioneereja. Hohmann (1925).

- 4) Mikä on aluksen nopeus $\dot{v}(t_1)$ hetkellä t_1 suhteessa *lähtöradan* Hillin koordinaatistoon?
- 5) Paljonko on lähtöradan Hillin koordinaatiston lineaarinen nopeus etäisyydellä r_1 ?
- 6) Mikä on aluksen nopeus hetkellä t_1 *ei-pyörivässä* koordinaatistossa?
- 7) Mitkä ovat ympyräradan kulmanopeus n' ja lineaarinen nopeus $n'r_1$ etäisyydellä r_1 Keplerin kolmannen lain mukaan? Ilmaise suureisiin n , r_0 ja r_1 .
- 8) Kuinka suuri on toisen eli apogeumin rakettityönnön oltava, jotta ympyränopeus saavutetaan uudella säteellä r_1 ? Analysoi huolellisesti!
- 9) Mikä on koordinaatti $v(t_1)$ lähtöradan Hillin koordinaatistossa? Toisin sanoen paljonko takaa-ajaja on "jäljessä"?
- 10) Aluksella on mukana mittalaite alusten välisen etäisyyden $\|\mathbf{u}\|$ ja lähestymisnopeuden $-\|\dot{\mathbf{u}}\|$ määrittämiseksi. Muodosta *havaintoyhtälöt*, jos tilavektori on

$$\mathbf{x} = \left[\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} \mid \dot{\mathbf{u}} \quad \dot{\mathbf{v}} \quad \dot{\mathbf{w}} \right]^T.$$



Satelliittinavigoinnin teknologiat

7



7.1 GPS-paikannusjärjestelmä

Globaali paikannusjärjestelmä **GPS** oli ensimmäinen satelliittijärjestelmä, jonka avulla voitiin navigoida tosiajassa. Sen mahdollisti kiertoradan geometria, satelliittien määrä ja ennen kaikkea signaalin koodaus, jonka ansiosta etäisyysmittaussignaaleja voitiin vastaanottaa monilta satelliiteilta yhtäikaa.

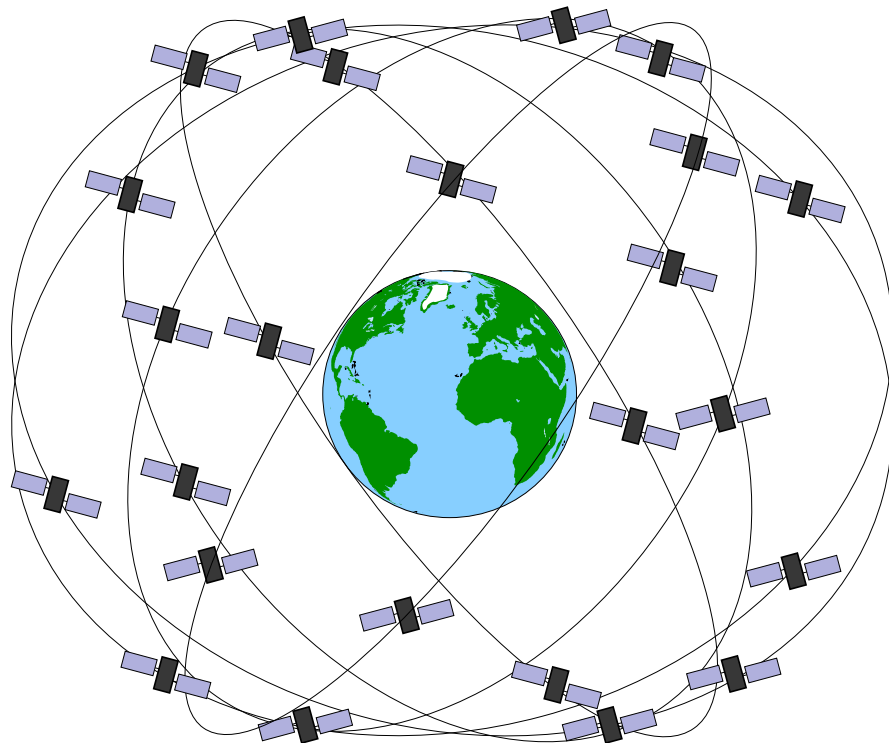
GPS-järjestelmä koostuu *kolmesta segmentistä* eli lohkoista: avaruus-, valvonta- ja käyttäjälohko. Avaruuslohkoon kuuluu vähintään 24, käytännössä 27–31 satelliittia, mukaan lukien "*active spares*". Ratatasoja on kuusi 60° välein. Jokaisessa ratatasossa on neljä satelliittia. Ratatasojen kaltevuuskulma päiväntasaajan nähden eli inkliinaatio on 55° .

Koko **GPS**-konstellation ja yksittäisten satelliittien geometria toistuu 23^h56^m eli yhden tähtivuorokauden eli kahden **GPS**-satelliittien rataperiodin välein. Aina tämän ajan kuluttua sekä havaitsijat pyörivän Maan pinnalla että yksittäiset satelliitit ovat inertiaalisessa geosentrisessä koordinaatistossa samoissa paikoissa avaruudessa. Havaintogeometria siis toistuu.

GPS-satelliitit kuuluvat eri teknologiasukupolviin eli *blokkeihin*. Vanhat blokkien I ja II satelliitit eivät ole enää toimimassa. Uusin tyyppi on Block III, jonka ensimmäinen satelliitti laukaistiin vuonna 2018. Seuraavan blokin, Block IIIF:n ("*III Follow-on*"), sopimuksen voitti Lockheed Martin.

Valittu geometria merkitsee, että melkein missä päin maailmaa ja melkein koska tahansa horisontin yläpuolella näkyy ainakin neljä satelliittia. Tavallisesti niitä näkyy enemmän, joskus huomattavastikin enemmän.

Lisää aiheesta **GPS** ja navigointi löytyy kirjasta **Strang ja Borre (1997)**,



KUVA 7.1. GPS-konstellaatio. Perustason konstellaatio, 24 satelliittia.

sivuilla 495–514. Hyvä oppikirja satelliittipaikannuksesta yleisemmin on [Poutanen \(2017\)](#).

Valvontalohko sisältää ([Control Segment](#), tilanne 2020):

- Kuusitoista seuranta-asemaa ympäri maapalloa. Toisin kuin tavallisilla [GPS](#)-havaintoasemilla, seuranta-asemilla käytetään tarkkoja atomikelloja.
- Tähän joukkoon kuuluu neljä ”antenniasemaa”, joiden kautta uudet rata-alkiot ja muu tieto ladataan satelliittien muistiin, tavallisesti kahdesti vuorokaudessa. Tehtävään voidaan käyttää myös seitsemää Air Force Satellite Control Network ([AFSCN](#)) -asemaa.
- Laskenta- ja ohjauskeskus ([MCS](#), *Master Control Station*) sijaitsee Schrieverin ilmavoimien tukikohdassa Colorado Springsissä ja sen varakeskus (*Alternate MCS*) Vandenbergissa Kaliforniassa.



7.2 GPS-satelliitit ja signaalin rakenne

[GPS](#)-satelliitin lähettämä radiosignaali koostuu *kantoaallosta*, niin sanotuista *näennäissatunnaiskoodeista*, jotka on moduloitu kantoaallolla, ja *navigointiviestistä*. Sekä kantoaaltoja että koodeja voidaan käyttää paikannuksessa. Käyttöliittymän ohjausasiakirjat ([GPS ICD](#)) kertovat



lisää.

Erikseen kannattaa mainita navigointiviesti, joka sisältää myös almanakan. Jokainen satelliitti lähettää almanakan, joka sisältää konstellaation kaikkien satelliittien likimääräisiä ratatietoja. Bittinopeus on vain 50 bittiä sekunnissa, ja viestin kokonaispituus on 12,5 minuuttia.

Alhaisen bittinopeuden takia voi kestää useita minuutteja, ennen kuin kylmäkäynnistetty tai maanosasta toiseen kuljetettu vastaanotin lukittuu niin moniin satelliitteihin, että ensimmäisen paikannusratkaisun laskenta onnistuu.

Navigointiviesti moduloidaan sekä L1-taajuudelle C/A-koodin päälle että P(Y)-koodin päälle taajuuksilla L1 ja (valinnaisesti) L2. Viestin modulointi koodien päälle tapahtuu XOR-operaation avulla. GPS:n modernisoinnin myötä otetaan käyttöön uusi navigointiviesti CNAV, joka lähetetään sekä L2C:n osana taajuudella L2 että taajuudella L5. Lisäksi on olemassa sotilaallinen navigointiviesti nimeltä MNAV.



7.2.1 Kantoaalto

Kantoaaltojen aallonpituus on noin 20 cm. Paikannustarkkuus kantoaallon vaiheen mittauksilla on noin 1 % siitä eli noin 2 mm. Sekä tarkka paikannus että tarkka navigointi perustuu kantoaallon vaiheen mittaukseen. Tähän tarkoitukseen käytetään aina kaksitaajuusvastaanottimia, jotta ionosfäärin etenemisviive voitaisiin poistaa. Katso taulukko 7.1.

Satelliittien rataliike aiheuttaa vastaanotetussa signaalissa dopplersiirtymän, joka on pienimmillään -5 jaksoa millisekunnissa, kun satelliitti loittonee vastaanottimesta, ja suurimmillään $+5$ jaksoa millisekunnissa, kun satelliitti lähestyy. Jos vastaanotin itse liikkuu, se aiheuttaa oman dopplersiirtymän.

Vastaanottimen on osattava seurata siirrettyä taajuutta. Siirtymä voidaan laskea almanakan perusteella.

Dopplersiirtymää voidaan käyttää GPS:n havaintosuureena näennäisatunnaiskoodin ja kantoaallon vaiheen mittausten lisäksi.

Tunnettu ongelma on, kun kantoaallon vaihetta käytetään havaintosuureena, että kaikki aallot ovat samannäköisiä. Tarvitaan *kokonaistuntemattomien* eli moniselitteisyyksien eli ambiguiteettien *ratkaisemista*. Tähän on kehitetty useita vaihtoehtoja.



TAULUKKO 7.1. GPS-signaalin kantoaallot. GPS-järjestelmän modernisointi lisää taajuuden L5, joka käytetään lähinnä ilmailussa.

Kantoaalto	Taajuus (MHz)	Aallonpituus (cm)	Perustaajuuden 10,23 MHz monikko
L1	1575,42	19,0	154×
L2	1227,60	24,4	120×
L5	1176,45	25,5	115×



7.2.2 Koodit

P-koodin "pseudoaallonpituus" on 29,3 m. Tämä on valon nopeus jaettuna P-koodin "chip rate" -arvolla eli bittinopeudella eli bittitaajuudella eli kooditaajuudella, mikä tuottaa bittien välisen etäisyyden lentävällä radioaallolla. Paikannustarkkuus on parhaimmillaan noin 1 % siitä eli noin 30 cm.

C/A-koodin *chip rate* eli bittinopeus eli bittitaajuus eli kooditaajuus vastaa "aallonpituutta" 293 m. Katso taulukko 7.2.

Kun vastaanotin aloittaa mittaamisen, se on ensin lukittava C/A-koodiin. Tämä on helppoa, koska koodi on lyhyt: se on 1023 bitin jono, joka toistuu millisekunnin välein. Vastaanotin vertaa jokaisen satelliitin saapuvaa signaalia kyseisen satelliitin koodin vastaanottimen itse generoimaan jäljitelmään 1023 mahdollisella viivearvolla. Kun vastavuus löytyy, vastaanotin lukittuu koodiin ja aloittaa navigointiviestin purkamisen.

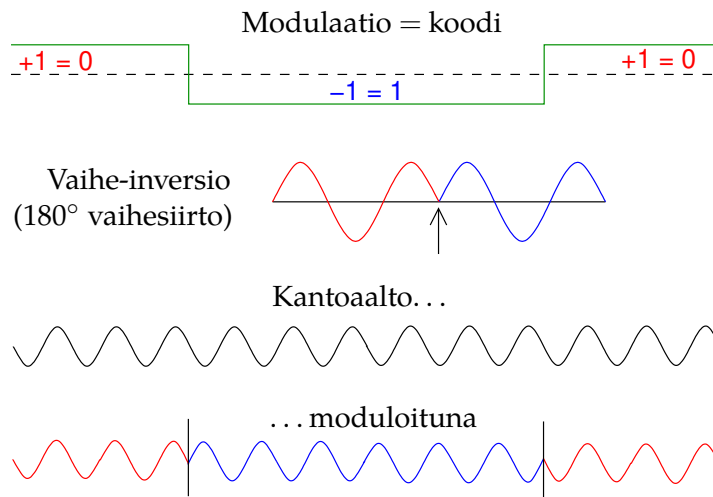
C/A-koodi antaa lyhyen toistojaksonsa takia satelliitin pseudoetäisyyden vain modulo 300 km, ja vieläkin heikolla tarkkuudella. Navigointiviesti sisältää kuuden sekunnin välein "kanavanvaihtosanan", joka kertoo vastaanottimelle tarkalleen, kuinka pitkälle pidempi P(Y)-koodi on edennyt, jolloin vastaanotin lukittuu myös P(Y)-koodiin. P(Y)-koodi on viikon mittainen viipale paljon pidemmästä (37 viikkoa!) näennäis-satunnaiskoodista. Jokainen satelliitti käyttää eri viikkoa. Tämä mahdollistaa pseudoetäisyyden määrittämisen satelliitille yksiselitteisesti ja tarkasti.



7.2.3 Modulaatiot

Koodit moduloidaan kantoaaltoon käyttäen niin sanottua *vaihemodulaatiota*, katso kuva 7.2. Vaiheella on kaksi mahdollista tilaa, joiden välillä on vaihe-ero $180^\circ = \pi$. Jos koodin bittiarvo on 0, kantoaallon vaihe pysyy ennallaan eli vaihesiirtymä on nolla. Jos bittiarvo on 1, kantoaallon





KUVA 7.2. Vaihemodulaation periaate.

vaihetta edistetään määrällä 180° , toisin sanoen kantoaalto kerrotaan $-1:n$ kanssa. Tekniikan nimi on binaarinen vaiheavainnus (**BPSK**).

GPS-järjestelmässä käytetään myös vaihesiirtymiä 90° ja 270° . Myös niillä voi koodata bittiarvojen 1 tai 0 virran. Näin yksi kantoaalto voi sisältää rinnakkain kaksi bittivirtaa, joiden välillä on vaihesiirtymä $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$. Kahta bittivirtaa kutsutaan modulaation "suoraksi vaiheksi" ja "kvadratuuri"-komponentiksi. Koko moduloitu kantoaalto on näiden kahden komponentin summa. Esimerkiksi kantoaallolla L_1 P(Y)-koodi on (sovitusti) moduloitu suoraan vaiheeseen ja C/A-koodi kvadratuuriin.



7.2.4 Koodijakokanavointi

GPS-kantaalloilla moduloidut näennäissatunnaiset koodit ovat yksilöllisiä jokaiselle satelliitille, eli ne toimivat kuin satelliitin "sormenjälki". Tämä on välttämätöntä, koska kaikki GPS-satelliitit lähettävät samoilla kantoaaltotaajuuksilla. Ratkaisu on nimeltään *koodijakokanavointi* (**CDMA**). Koodit on rakennettu huolellisesti keskenään "ortogonaalisiksi", jotta eri satelliiteista vastaanottimen antennille tulevien signaalien erottaminen toisistaan olisi helppoa.

C/A-koodeina käytetään Goldin koodeja, jotka esitellään osiossa 7.4. Niiden pituus on 1023 bittiä, eli ne toistuvat millisekunnin välein. P-koodille käytetään paljon pidempiä bittijonoja. Nämä koodit näyttävät satunnaisilta, mutta ne generoidaan tunnetulla algoritmilla, jota vastaanottimetkin osaavat käyttää.



TAULUKKO 7.2. GPS-signaalin eri näennäissatunnaiskoodit (PRN, *pseudo-random noise code*). GPS-järjestelmän modernisointi lisää tähän suurehkon määrän uusia koodeja sekä alkuperäisillä kantoaaltotaajuuksilla L1 ja L2 että uudella taajuudella L5. "I" ja "Q" merkitsevät suoraa vaihetta ja kvadratuuri-modulaatiota.

Lyhenne	Nimi	Modulaatio-				
		Kooditaajuus (Mb/s)	tyyppi	Toisto- jakso	Kanto- aalto	I/Q
C/A	Coarse/Acquisition ^b	1,023	BPSK	1 ms	L1	Q
P, P(Y) ^a	Precise/Protected ^b	10,23	BPSK	1 viikko	L1, L2	I
L1C	L1 siviili, tietoa ^b pilottisignaali overlay	0,5115	BOC(1,1)	10 ms	L1	I
		0,5115	TMBOC ^c	10 ms		
		100 b/s	BPSK	18 s		
L2C	L2 siviili, moderate (CM) ^b long (CL)	0,5115	BPSK	20 ms	L2	Q ^d
		0,5115	BPSK	1,5 s		
M	Sotilaallinen	5,115	BOC(10,5)		L1, L2	Q
I ₅	L5 tietoa ^b	10,23	BPSK	1 ms	L5	I
Q ₅	L5 pilottisignaali	10,23	BPSK	1 ms		Q

^aY- eli P(Y)-koodi saadaan moduloimalla P-koodi XOR-operaattorilla salaisella W-koodilla. Tarkoituksena on estää "spoofingia" eli GPS-signaalin väärennön generoimista ja lähettämistä.

^bKantaa navigointiviestiä.

^cPilottisignaali käyttää aikamultipleksoitua TMBOC-modulaatiota(1,1)/(6,1).

^dOletus. I on valinnainen.

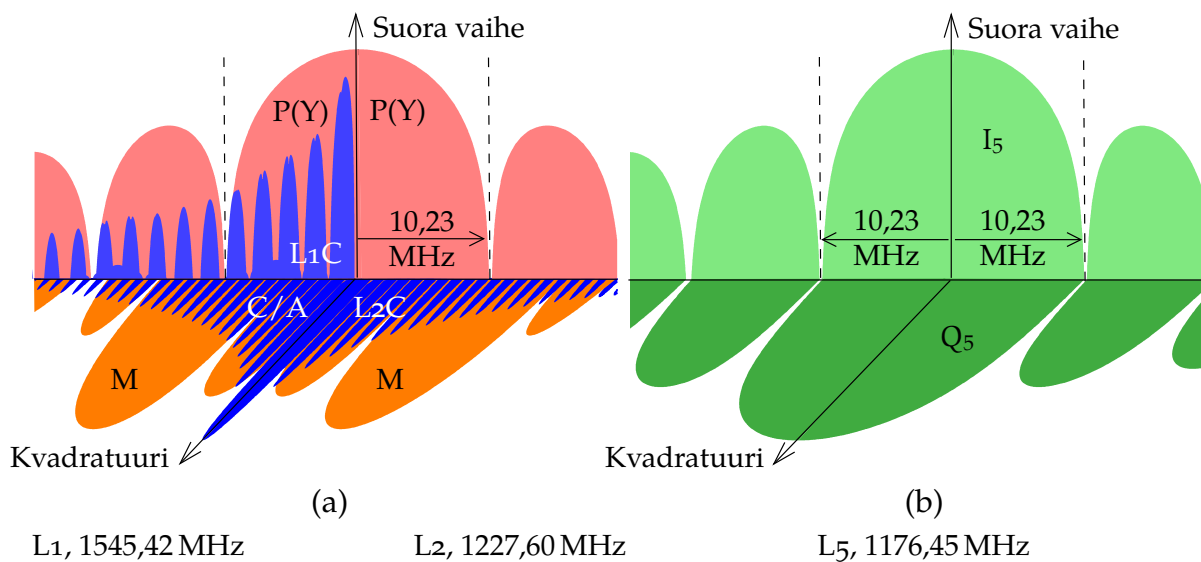


7.2.5 Polarisointi

GPS-järjestelmän radiolähetykset ovat ympyräpolarisoituja myötäpäivään. Tämä merkitsee, että etenemispolkua pitkin katsottuna kenttävektori kiertyy korkkiruuvin tavoin myötäpäivään: yhden täyden kierron jokaista aaltojaksoa kohti. Katso kuva 7.4. Sama pätee järjestelmille GLONASS, Galileo, BeiDou ja QZSS. Tähän ratkaisuun on päädytty siksi, että vastaanottimen antennille halutaan tehdä mahdollisimman helppoksi hylätä kerran heijastuneet signaalit, jotka tulevat esimerkiksi antennin lähellä olevista heijastavista pinnoista. Ei-toivotut heijastukset tunnetaan *monitieongelmana*.

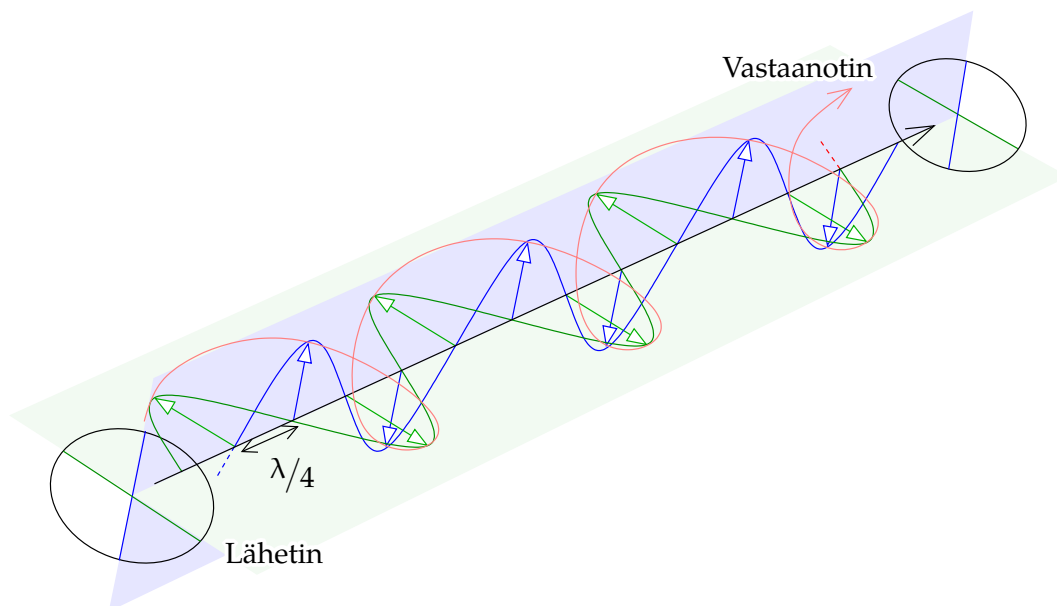
Hylkääminen perustuu siihen, että heijastus täydellisesti heijastavalta





KUVA 7.3. Kantoaallon suoran vaiheen ja kvadratuurin vaihekulmien GPS-koodien tehospektrit. L1 ja L2 annetaan yhdistetyssä kuvassa: C/A ja L1C moduloidaan taajuudelle L1, kun taas L2C moduloidaan samalla tavalla taajuudelle L2.

pinnalta, esimerkiksi metallipinnalta, muuttaa myötäpäivään ympy-



KUVA 7.4. Ympyräpolarisoidut radioaallot kulkevat lähettimeltä vastaanottimelle. Ympyräpolarisoitu aalto saadaan yhdistämällä kaksi lineaarisesti polarisoitua aaltoa, jotka ovat keskenään kohtisuorassa ja joiden välillä on vaihesiirtymä $\pi/2$.

räpolarisoidun säteilyn vastapäivään polarisoiduksi säteilyksi¹. Myötapäivään polarisoidun säteilyn voidaan katsoa koostuvan kahdesta kohtisuorasta lineaarisesti polarisoidusta komponentista, joiden vaihekulmat eroavat toisistaan määrällä $\pi/2$. Tarkat GPS-vastaanottimet käyttävät ristidipolin tyyppistä antennia, jossa kohtisuorat komponentit yhdistetään viivästyttämällä vain toisen komponentin vaihekulmaa määrällä $\pi/2$. Myötapäivään polarisoidun säteilyn tapauksessa tämä merkitsee, että molempien komponenttien vaiheet ovat identtisiä ja vahvistavat toisiaan, kun ne yhdistetään. Toisaalta vastapäivään polarisoidun säteilyn komponentit ovat vastavaiheessa ja kumoutuvat täysin tai osittain, kun ne yhdistetään.



7.2.6 Suhteellisuusteoria

Vastaanotetun GPS-signaalin taajuus on siirtynyt relativistisesti kahdesta syystä: vastaanottimet ovat paljon satelliitteja syvemmillä Maan veto-voimapotentiaalikentässä ja satelliitit liikkuvat huomattavalla nopeudella. Vakiokorjausta $-4,4647 \cdot 10^{-10} f$ taajuudelle f sovelletaan kaikille satelliittikelloille. Tämä korjaa suurimman osan satelliittiradan ja keskimerenpinnan välisestä relativistisesta vaikutuksesta. Satelliittiradan eksentrisyyteen liittyvä pieni vaihteleva korjaus jää vastaanottimen tehtäväksi².

Pyörivällä maapallolla myös samanaikaisuus on ongelmallinen, niin sanottu *Sagnacin ilmiö*. Suhteellisuusteoriassa ei ole olemassa absoluuttista samanaikaisuutta. Jos GPS-laskelmia tehdään Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, vastaanottimen on tehtävä mitattuihin pseudoetäisyyksiin Sagnacin korjaus, joka riippuu maapallon paikallisesta pyörimisnopeudesta ja satelliitin etäisyydestä havaintopaikan meridiaanitasolta (Poutanen, 2017, yhtälö 4.19):

$$\delta_{\text{Sagnac}} p = \frac{1}{c} \langle \mathbf{V}' \cdot \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{c} \langle \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{X} \rangle \cdot \mathbf{x} \rangle,$$

jossa $\mathbf{V}' = \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{X} \rangle$ on maapallon pyörimisen aiheuttama havaintopaikan lineaarinen nopeusvektori — joka osoittaa suoraan itään — ja \mathbf{x} on satelliitin, \mathbf{X} vastaanottimen geosentrinen paikkavektori. Huomaa,

¹Ei-metallipintojen, kuten veden tai maaperän, tapauksessa asia on monimutkaisempi. Kohtisuorasti heijastunut säteily on vastapäivään ympyräpolarisoitu, mutta muiden tulokulmien osalta heijastunut säteily on elliptisesti polarisoitu.

²GPS-järjestelmän alkuaikoina laskentateho ei ollut riittävä tämän korjauksen tekemiseksi satelliitilla (Ashby, 2003)!



että korjaus voidaan tulkita inertiaalisessa koordinaatistossa havaitsijan tekemäksi matkaksi satelliitin suuntaan sen aikana, kun signaali lentää satelliitilta vastaanottimelle nopeudella c .

Tämä on tärkeä asia, kun vertaillaan eri maanosissa olevia atomikelloja GPS-järjestelmän välityksellä. Katso [Ashby \(2003\)](#).



7.3 Kantaaallon korkkiruuvi



7.3.1 Antennin suuntauksen vaikutus

Tutkitaan antennin suuntauksen vaikutusta havaittuun kantaaallon vaiheeseen. Katso kuva 7.5, jossa aalto saapuu antennille vasemmalta alanurkasta. Sininen ellipsi näyttää lyhennyksen, joka johtuu kenttävektorin projisoimisesta antennin vaakatasoon. Tässä tasossa saapuva ympyräpolarisoitu aalto voidaan kuvata seuraavasti, kun jätetään pois mielivaltainen ajan origo ja amplitudi:

$$\mathbf{E} = \cos(\omega t) \tilde{\mathbf{i}} + \sin(\omega t) \cos \zeta \tilde{\mathbf{j}},$$

jossa $\tilde{\mathbf{j}}$ on yksikkövektori vaakatasoon projisoidun näkölinjan suunnassa ja $\tilde{\mathbf{i}}$ siihen kohtisuora yksikkövektori vaakatason sisällä. ζ on satelliitin zeniittikulma. Jos \mathbf{i} ja \mathbf{j} ovat yksikkövektorit antennin ristidipolien suunnissa, signaalit näissä dipoleissa ovat

$$\begin{aligned} s_i &= \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \rangle = \cos(\omega t) \langle \tilde{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i} \rangle + \sin(\omega t) \cos \zeta \langle \tilde{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i} \rangle = \\ &= \cos(\omega t) \cos(\delta\phi) + \sin(\omega t) \cos \zeta \sin(\delta\phi), \\ s_j &= \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \rangle = \cos(\omega t) \langle \tilde{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j} \rangle + \sin(\omega t) \cos \zeta \langle \tilde{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{j} \rangle = \\ &= \sin(\omega t) \cos \zeta \cos(\delta\phi) - \cos(\omega t) \sin(\delta\phi). \end{aligned}$$

Tässä $\delta\phi$ on atsimuuttiero näkölinjan ja antennin välillä.

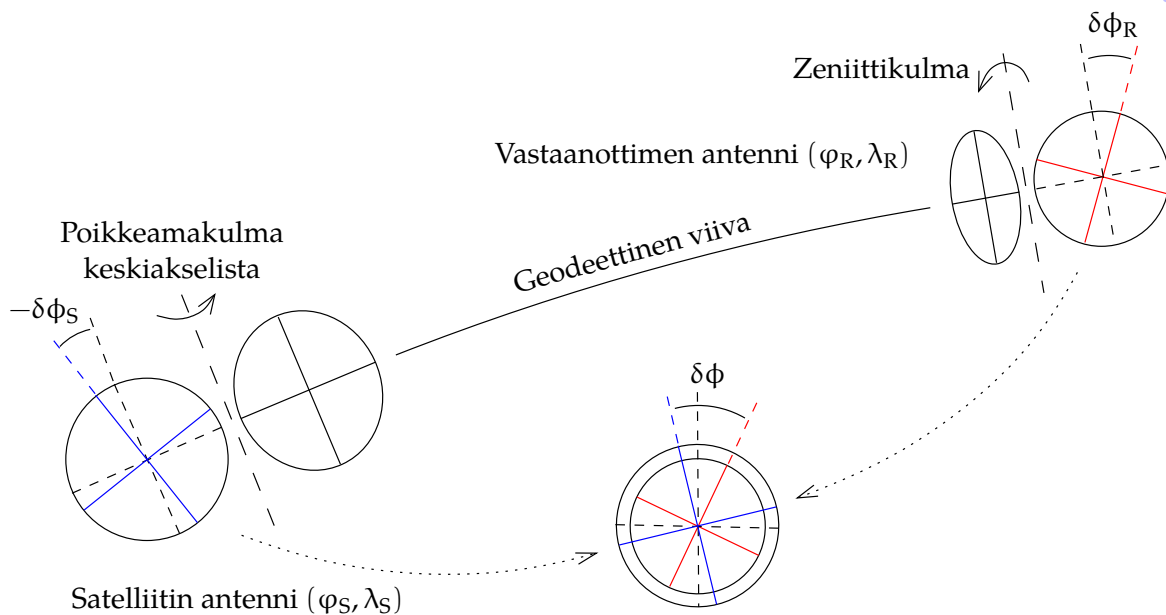
Siirtämällä s_j :n vaihe suhteessa s_i :hin määrällä $\pi/2$ saadaan

$$s_j^* = \cos(\omega t) \cos \zeta \cos(\delta\phi) + \sin(\omega t) \sin(\delta\phi),$$

ja yhteenlasku antaa

$$\begin{aligned} s_i + s_j^* &= \cos(\omega t) (\cos(\delta\phi) + \cos \zeta \cos(\delta\phi)) + \\ &+ \sin(\omega t) (\cos \zeta \sin(\delta\phi) + \sin(\delta\phi)) = \\ &= (1 + \cos \zeta) (\cos(\omega t) \cos(\delta\phi) + \sin(\omega t) \sin(\delta\phi)) = \\ &= (1 + \cos \zeta) \cos(\omega t - \delta\phi). \quad (7.1) \end{aligned}$$





KUVA 7.6. Vaihekelaus. Kantoaallon vaiheen havainnon vaihekelauksen kokonaiskulma on $\delta\phi = \delta\phi_R - \delta\phi_S$: ero vastaanottimen ja satelliitin antennien suuntauspoikkeamien välillä näkölinjan atsimuutilta. Tämän laskemiseksi kummankin antennin pääakseli käännetään vaakaviivan (pitkät katkoviivat) ympäri näkölinjaan, jolloin antennien tasot ja niiden sisältämät ristidipolit kääntyvät tasoiksi, jotka ovat kohtisuorassa näkölinjaan. Nyt kelauskulma on kulma näkölinjan ympäri kahden ristidipoliparin välillä.

Kuva osoittaa tilanteen projisoituna geosentriseen suuntapalloon, jolloin näkölinja projisoituu geodeettiseksi viivaksi.

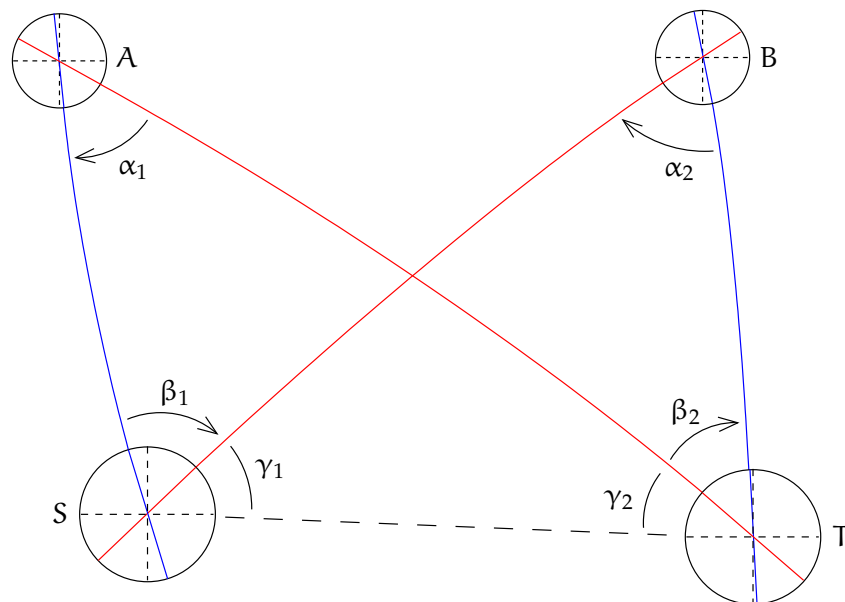


7.3.2 Kantoaallon vaihekelaus

Kantoaallon vaiheen mittauksissa **GPS:n** radioaaltojen ympyräpolarisointi tuo esiin ikävän lisähaasteen: antennin kiertäminen sen pääakselin ympäri muuttaa kantoaallon vaiheen mittausta. Se on kuin kääntäisi korkillista pulloa, jonka korkissa on korkkiruuvi, ja pitäisi korkkiruuvin kahvasta kiinni: korkkiruuvi liikkuu joko sisään tai ulos pullon kääntösuunnasta riippuen.

Korkkiruuvin kahvakaan ei pysy liikkumatta: **GPS**-satelliitit kääntyvät kiertoradallaan seuraten Aurinkoa sähkövoimansa vuoksi. Tämä ilmiö voidaan kuitenkin mallintaa. Vastaanottimen antennin tapauksessa se on käyttäjän vastuulla. Ilmiö, *vaihekelaus*, voi vaikuttaa jopa puolen aallonpituuden verran. Kuva 7.6 antaa selityksen.

Vaihekelauksen vaikutus on sekä vastaanottimen että satelliitin antennilla sama kuin näkölinjan ja antennin ristidipolin atsimuuttien välinen



KUVA 7.7. Vaihekelauksen vaikutus kaksoiserotushavainnoille. Kuva näyttää tilanteen projisoituna geosentriseen suuntapalloon, jolloin näkölinjat projisoituvat geodeettisiksi viivoiksi.



ero, yhtälö 7.1. Oletetaan, että näkölinja ei vaikuta asiaan, mikä pitää paikkansa, jos vastaanottimen ja satelliitin luotiviivat ovat samassa tasossa, toisin sanoen Maa on pallo. Katso Wu ym. (1993).

Käy ilmi, että perinteisissä geodeettisissa mittauksissa yksittäisen vastaanottimen tai satelliitin antennin suuntauksen vaikutus häviää, kun lasketaan verkkoa tavan mukaan erotushavainnoista. Paikallisissa verkoissa myös geometrian vaikutus poistuu erotushavainnoista.

Laajemmissa verkoissa, jotka ovat kooltaan 1000 km tai yli, tämä ei enää päde ja geometrian vaikutus on otettava huomioon. Kuvassa 7.7 nähdään, kuinka suurten verkkojen ja kaksoiserotusten tapauksessa syntyy nollasta eroava vaihekelauksen nettovaikutus.

Jokainen antenni, olipa se vastaanottimen A tai B tai satelliitin S tai T, osallistuu osuudella, joka on yhtä kuin kahden muun antennin atsimuutin välinen kulma: α_1 ja α_2 kahden satelliitin antennin välillä katsottuna vastaanottimelta, ja β_1 ja β_2 kahden vastaanottimen antennin välillä katsottuna satelliitilta.

Nämä osuudet tulee laskea huolellisesti yhteen asianmukaisilla etumerkeillä varustettuina. Tulos on

$$\begin{array}{rcl}
 -\delta\phi_{AB}^{ST} = \alpha_1 - (-\beta_1) & - & (\alpha_2 - (-\beta_2)) \\
 0 = \gamma_1 + \gamma_2 & - & (\gamma_1 + \gamma_2) \\
 \hline
 -\delta\phi_{AB}^{ST} = \underbrace{\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) + \gamma_2}_{180^\circ + \epsilon_{AST}} & - & \underbrace{(\alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2) + \gamma_1)}_{180^\circ + \epsilon_{BST}} \\
 \implies \delta\phi_{AB}^{ST} = \epsilon_{BST} - \epsilon_{AST},
 \end{array}$$

jossa ϵ on geosentrisen suuntapallon kolmion *palloylijäämä*. Palloylijäämä on yhtä kuin kolmion pinta-ala yksikkösuuntapallolla. Symmetrisesti myös $-\delta\phi_{AB}^{ST} = \epsilon_{TAB} - \epsilon_{SAB}$. Pienten kolmioiden eli paikallisten geodeettisten verkkojen kohdalla tämä on merkityksetöntä.

GPS:n käsittelymenetelmissä, jotka eivät perustu erotushavaintojen muodostamiseen, vastaanottimen ja satelliitin antennin suuntaus on otettava huomioon nimenomaisesti. Tällaisia menetelmiä on esimerkiksi tarkka absoluuttinen paikannus (**PPP**).

Navigoinnissa esimerkiksi lentokoneeseen kiinnitetty antenni kääntyy koneen kanssa. Antennin kiertäminen sen oman pysty akselin ympäri muuttaa kaikilta satelliiteilta vastaanotetun signaalin vaiheen samalla kulmalla satelliitin zeniittikulmasta riippumatta ([García-Fernández ym., 2008](#)). Tästä seuraa, että vaiheen muutos imeytyy vastaanottimen kellotuntemattomaan. Satelliittien väliset erotushavainnot eivät muutu. Tiukkoja käännöksiä tulisi välttää ja käyttää vain suoralla lennolla saatuja mittauksia. Tämä voi olla merkityksellistä, kun tarkkoja **GPS**-mittauksia käytetään osana tietotuotetta esimerkiksi ilmagravimetriassa, luku 12.

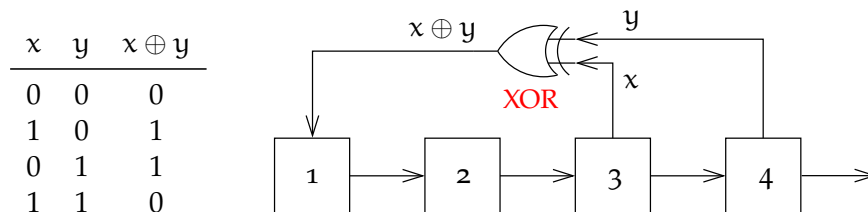
7.4 GPS:n lukuteoria

Nykyisin Internetin finanssi- ja muu liiketoiminta on kriittisesti riippuvaista lukuteoriasta. Tätä eksoottista matematiikan haaraa harrastettiin aikanaan sen itsensä vuoksi, eikä kukaan olisi uskonut, että sitä vielä joskus käytetään johonkin hyödylliseen. Tänäpäin lukuteoria mahdollistaa vahvan salauksen ja todennuksen, jotta ihmiset uskaltavat käyttää Internetiä raha-asioissaan.

Ei varmaan tule yllätyksenä, että lukuteoria on tunkeutunut myös satelliittipaikannukseen: sitä käytetään **GPS:n** kantoaalloille moduloitujen näennäissatunnaiskoodien muodostamisessa.

Lähdetään liikkeelle lineaarisen palautteen siirtorekisteristä (**LFSR**), kuva 7.8. Tämä esimerkki on neljän solun eli kiikun siirtorekisteri.





KUVA 7.8. Lineaarisen palautteen siirtorekisteri. Vasemmalla **XOR**-operaation määritelmä.



Jokainen solu sisältää bittiarvon 1 tai 0. Kun kellosignaali liipaisee siirtorekisterin, jokaisen solun sisältö siirtyy oikealla puolella olevaan soluun. Lisäksi solut 3 ja 4 luovat **XOR**-portin kautta bittiarvon, joka menee soluun 1.

Kun $n = 4$, rekisterillä on $2^n = 16$ mahdollista sisällön tilaa eli kaikki neljän bitin binaariluvut. Suljemme tästä pois tilan, joka koostuu pelkästään nolista, koska kahden nollan välinen **XOR**-operaatio $0 \oplus 0 = 0$, joten rekisteri ei koskaan pääsisi pois kaikkien nollien tilasta.

Tässä geometriassa jokainen liipaisu luo nelibittisen luvun ja voidaan näyttää, että joukko, joka koostuu kaikista nolista eroavista nelibittisistä luvuista kuljetaan läpi satunnaisen näköisessä järjestyksessä. Lukuja on yhteensä

$$2^n - 1 = 15.$$

Katso taulukko 7.3. Sen jälkeen sarja palaa lähtöarvoon ja sykli toistuu.

Solun 4 bittijono on myös se, joka tulee rekisteristä ulos.

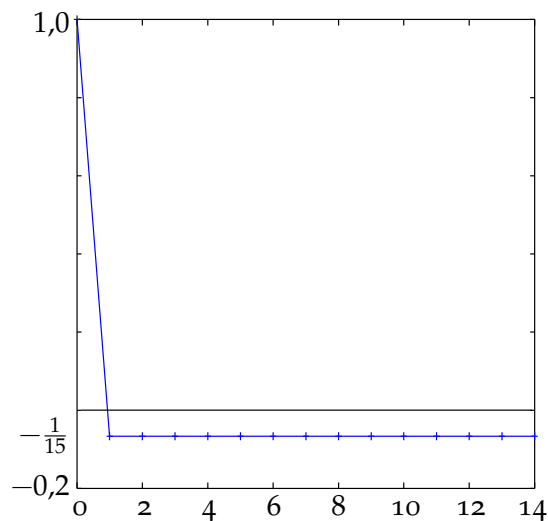
- Ykkösten määrä jonossa on $2^{n-1} = 8$, ja nollia on yksi vähemmän eli $2^{n-1} - 1 = 7$. Jos kaikki nelibittiset luvut olisivat joukon jäseniä, odotettaisiin yhtä monta loppubittiä 1 kuin loppubittiä 0. Mutta luku 0000 ei ole joukon jäsen!
- Jonon aloittaminen eri luvulla kuin 1000 tuottaa *saman jonon*, vain syklisesti siirrettynä.
- Voidaan näyttää (liite B), että **XOR**-operaatio jonon x ja sen syklisesti siirretyn version x^α välillä tuottaa vieläkin eri tavalla syklisesti siirretyn version x^β .
- Jono x ja sama jono x^α minkä tahansa syklisen siirron α jälkeen korreloivat minimaalisesti: samanarvoisten bittien lukumäärä on $2^{n-1} - 1$. Toisin sanoen $x \oplus x^\alpha$ sisältää 2^{n-1} ykköstä ja $2^{n-1} - 1$ nollaa.
- Koska yhdelle jonolle x on olemassa $2^n - 1$ syklisesti siirrettyä





TAULUKKO 7.3. Kuvan 7.8 rekisterin arvojen jono. Oikealla syklinen autokorrelaatiofunktio.

	1	2	3	4	$3 \oplus 4$	Ulos
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	1	0	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0
7	1	0	1	1	0	1
8	0	1	0	1	1	1
9	1	0	1	0	1	0
10	1	1	0	1	1	1
11	1	1	1	0	1	0
12	1	1	1	1	0	1
13	0	1	1	1	0	1
14	0	0	1	1	0	1
15	0	0	0	1	1	1
16	1	0	0	0	0	0



versiota, jotka kaikki korreloivat minimaalisesti keskenään, tuntuu houkuttelevalta käyttää niitä erottamaan yksittäiset satelliitit toisistaan. Tämä ei kuitenkaan toimi, koska GPS:n havaintosuure on juuri signaalin siirto ajassa. On löydettävä koodeja, jotka ovat *olennaisesti* erilaisia: ei ole mahdollista muuttaa yhtä toiseksi pelkästään syklisellä siirrolla.

- o Robert Gold näytti vuonna 1967, että jos kaksi samanpituista, mutta geometrisesti erilaisten siirtorekisterien generoimaa jonoa x ja y valitaan sopivasti, kaikki jonot $x \oplus y^\alpha$, jotka muodostetaan XOR-operaation avulla jonoista x ja y eri syklisten siirtymien α sovellettaessa
 - ovat olennaisesti erilaisia
 - ristikorreloivat myös minimaalisesti keskenään
 - niiden autokorrelaatiofunktio muistuttaa deltafunktia: sillä on huippu origolla ja pieniä arvoja muualla.

Katso liite B.

”Minimaalisen korrelaation” käsite on selitettävä. Jos on kaksi bittijo-

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{ccc|c}
 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 1 & \\
 1 & 0 & 1 & \\
 1 & 1 & 0 &
 \end{array} \right\} \begin{array}{c} x, y \\ \oplus \downarrow \\ x \oplus y \end{array} \xleftrightarrow[\overline{y}=1-2y]{\overline{x}=1-2x} \begin{array}{c} \overline{x}, \overline{y} \\ \downarrow \times \\ \overline{x} \times \overline{y} = \overline{x \oplus y} \end{array} \left\{ \begin{array}{cc|c}
 -1 & -1 & +1 \\
 -1 & +1 & -1 \\
 +1 & -1 & -1 \\
 +1 & +1 & +1
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

KUVA 7.9. Kommutoiva kaavio, joka selittää koodibittien ja sähkömagneettisten signaaliarvojen välisen suhteen sekä sen, miten XOR-operaattori kuvautuu kertolaskuun.



noa x ja y , joiden alkiot ovat $x_i, y_i, i = 1, \dots, 2^n - 1$, nämä bitit esiintyvät GPS-signaalin modulaatiossa vaihesiirtoina 0° ja 180° eli kantoaallon kertomisina arvoilla $+1$ ja -1 . Siis bittijonot x, y esitetään signaaliarvojen jonoina $\overline{x}, \overline{y}$, joissa arvo -1 edustaa bittiä 1 ja arvo $+1$ bittiä 0. Ilmaistuna lineaarisina suhteina $\overline{x} = 1 - 2x, \overline{y} = 1 - 2y$. Katso kaavio

7.9.

Sen jälkeen korrelaatio — ”syklinen ristikorrelaatio” — on

$$\begin{aligned}
 \text{Corr}\{\overline{x}, \overline{y}\} &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n - 1} \overline{x}_i \overline{y}_i = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n - 1} \overline{x_i \oplus y_i} = \\
 &= \frac{1}{2^n - 1} (C_0(x \oplus y) - C_1(x \oplus y)),
 \end{aligned}$$

mikä on lähellä nollaa, jos ilmaisun $x \oplus y$ bittien $0 = +1$ ja bittien $1 = -1$ lukumäärät $C_0(x \oplus y)$ ja $C_1(x \oplus y)$ ovat lähellä toisiaan.

Taulukossa 7.3 on piirretty syklinen autokorrelaatiofunktio

$$\begin{aligned}
 \text{Corr}\{\overline{x}, \overline{x}^\alpha\} &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n - 1} \overline{x_i \oplus x_i^\alpha} = \\
 &= \frac{1}{2^n - 1} (C_0(x \oplus x^\alpha) - C_1(x \oplus x^\alpha)) \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

syklisen siirron α funktiona. Nähdään, että funktion arvo on yksi, jos $x = x^\alpha$, siis siirto on nolla. Kaikille nollasta eroaville siirroille arvo on $-\frac{1}{2^n - 1}$. Tämä tulos pätee yleisesti, arvolla $-1/(2^n - 1)$. Siis suurille arvoille n funktio muistuttaa Diracin deltafunktiota, osio 2.6. Tämä merkitsee, että korrelaattori osaa tunnistaa yksiselitteisesti oikean aikasiirron vastaanotetun koodin ja paikallisesti generoidun jäljitelmäkoodin välillä.

Kuvan 7.8 geometrian valinta ei ole sattumaa, kuten voidaan helposti näyttää rakentamalla vaihtoehtoinen siirtorekisteri, jonka XOR on solujen 2 ja 4 eikä solujen 3 ja 4 välillä, katso taulukko 7.4. Tarvitsemme maksimipituuden jonoja eli *m-jonoja*, jotka toistuvat $2^n - 1$ rekisterin





TAULUKKO 7.4. Rekisteriarvojen jonot vaihtoehtoisen rekisterin geometrian tapauksessa.

	1 2 3 4	$2 \oplus 4$	Ulos		1 2 3 4	$2 \oplus 4$	Ulos		1 2 3 4	$2 \oplus 4$	Ulos
1	1 0 0 0	0	0	1	1 0 0 1	1	1	1	0 1 1 0	1	0
2	0 1 0 0	1	0	2	1 1 0 0	1	0	2	1 0 1 1	1	1
3	1 0 1 0	0	0	3	1 1 1 0	1	0	3	1 1 0 1	0	1
4	0 1 0 1	0	1	4	1 1 1 1	0	1	4	0 1 1 0	1	0
5	0 0 1 0	0	0	5	0 1 1 1	0	1				
6	0 0 0 1	1	1	6	0 0 1 1	1	1				
7	1 0 0 0	0	0	7	1 0 0 1	1	1				

siirron jälkeen. Matematiikan haara, joka tutkii tätä ongelmakenttää on nimeltään Galois'n teoria, Évariste Galois'n³ mukaan.

E. Galois

GPS-järjestelmän C/A-koodi tuotetaan kahdella lineaarisen palautteen siirtorekisterillä, joilla on eri geometriat. Rekisterit ovat molemmat 10 bittiä pitkiä, ja niiden tuottamat koodit ovat 1023 bittiä pitkiä. Ne yhdistetään XOR-portin kautta eri syklisten siirtymien jälkeen, jolloin ne tuottavat satelliittikohtaiset "Goldin koodit", jotka moduloidaan lähtevälle kanta-aallolle. Katso kuva B.1.



7.5 GPS-signaalin tehospektri

GPS-signaalin alkuperäiset näennäissatunnaiskoodin modulaatiot koostuvat yksinkertaisista suorakulmaisista blokeista, kuten funktio

$$B(t) = \begin{cases} 1 & \text{jos } t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{jos } t \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (7.3)$$

Ei ole vaikeaa näyttää, että tämän funktion Fourier'n muunnos on ($f \neq 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{B\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} B(t) e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi i f t} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi i f} [e^{-2\pi i f t}]_{-1/2}^{+1/2} = -\frac{1}{2\pi i f} (e^{-\pi i f} - e^{+\pi i f}) = \\ &= \frac{1}{\pi f} \frac{e^{+\pi i f} - e^{-\pi i f}}{2i} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

³Évariste Galois (1811–1832) oli ranskalainen matemaatikko ja lukuteoreetikko, joka keksi äärellisten kuntien teorian eli Galois'n teorian. Hän kuoli 20-vuotiaana kaksintaistelussa saatuihin vammoihin.

Tapauksessa $f = 0$ saadaan $\mathcal{F}\{B\} = \int_{-1/2}^{+1/2} dt = 1$. Tätä funktiota kutsutaan sinc-funktioksi. Sen määritelmä on

$$\text{sinc } x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{jos } x \neq 0, \\ 1 & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

GPS-signaalin modulaatiota $C(t)$, olipa se C/A-koodi tai P(Y)-koodi, voidaan katsoa stationaariseksi prosessiksi, jonka odotusarvo häviää:

$$E\{C(t)\} = 0.$$

Stationaarisen prosessin autokovarianssifunktio on, kun käytetään yhtälöä 2.13:

$$A_C(\Delta t) = \text{Cov}\{\underline{C}(t), \underline{C}(t + \Delta t)\} = E\{\underline{C}(t)\underline{C}(t + \Delta t)\}. \quad (7.5)$$

On myös selvää, että funktio $C(t)$ näennäissatunnaiskohinana koostuu biteistä, jotka eivät korreloi keskenään. Tämä merkitsee, että

$$A_C(\Delta t) = 0 \quad \text{jos } |\Delta t| > 1,$$

koska silloin yhtälössä 7.5 jokaisen bitin arvo kerrotaan vain muista biteistä tulevien arvojen kanssa, joiden kanssa se ei korreloi.

Ainoat arvot Δt , joille yhtälössä 7.5 oleva kertolasku tuottaa jotain, minkä odotusarvo eroaa nolasta, ovat arvot $-1 < \Delta t < 1$. Näille arvoille kovarianssiarvo on yhtä kuin blokin $B(t)$ ja Δt :n verran ajassa siirtyneen saman blokin $B(t + \Delta t)$ päällekkäinen pinta-ala. Näemme, että tämä on kolmiofunktio $T(\Delta t)$, jonka määritelmä on

$$T(\Delta t) = \begin{cases} \Delta t + 1 & \text{jos } \Delta t \in (-1, 0], \\ 1 - \Delta t & \text{jos } \Delta t \in [0, 1], \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Katso kuva 7.10.

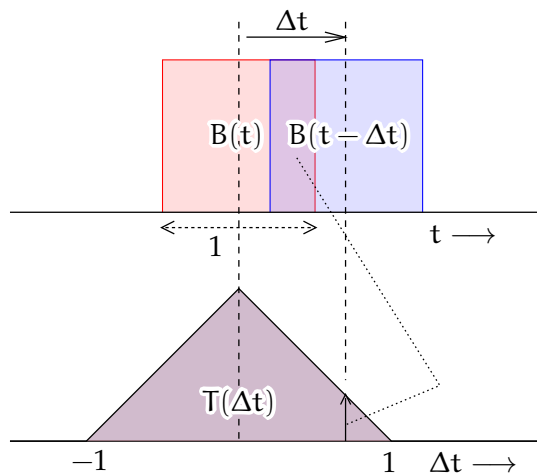
Tämä kolmiofunktio on siis näennäissatunnaiskoodin $C(t)$ autokovarianssifunktio $A_C(\Delta t)$. Ja tutkimalla kuvaa nähdään myös, että T on sama kuin blokkifunktion B konvoluutio itsensä kanssa,

$$T = B \otimes B \iff T(\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(t)B(t - \Delta t) dt.$$

Fourier'n teorian konvoluutiolauseen mukaan tämä merkitsee, että T :n Fourier'n muunnos on, yhtälön 7.4 kanssa,

$$\mathcal{F}\{T\} = \mathcal{F}\{B\}^2 = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2.$$





KUVA 7.10. GPS-modulaation autokovarianssifunktio.

Näin olemme löytäneet GPS:n näennäissatunnaiskoodin autokovarianssifunktion Fourier'n muunnoksen. Se tunnetaan myös nimellä *tehon spektraalitiheys*, yhtälö 2.31:

$$\mathcal{A}_C(f) = \mathcal{F}\{A_C\} = \mathcal{F}\{T\} = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2. \quad (7.6)$$

Tämä funktio C/A- ja P(Y)-koodeille skaalattuna sopivasti niiden eri bittitaajuuksia varten ja desibelin asteikossa on piirretty kuvaan 7.11.

Tämän yhtälön johtamisessa oletettiin, että koodibitin leveys on yksi. Jos se on jotain muuta, kuten $1/f_c$, jossa f_c on "kooditaajuus" yksikössä bittejä sekunnissa, on f korvattava yhtälössä 7.6 arvolla f/f_c . Myös tulos tulee jakaa arvolla f_c^4 .

Tämän kanssa yhtälöstä 7.6 tulee

$$\mathcal{A}_C(f) = \frac{1}{f_c} \left(\frac{\sin(\pi f/f_c)}{\pi f/f_c} \right)^2 = f_c \left(\frac{\sin(\pi f/f_c)}{\pi f} \right)^2.$$



7.6 BOC, binaarinen offset kantoaaltomodulaatio

Alkuperäinen GPS-järjestelmä otti käyttöön modulaatiotekniikan nimeltä **BPSK**, *binary phase-shift keying* eli binaarinen vaiheavainnus. **Galileo**-järjestelmä käyttää uudempaa tekniikkaa nimeltä **BOC**, *binary offset*

⁴Ajattele sitä näin: jos kooditaajuus f_c on yhden megahertsin, niin voit valita mikrosekunnin uudeksi aikayksiköksi, jolloin jokaisella bitillä on leveys yksi. "Uusi" taajuus, ilmaistuna megahertseinä, on nyt $f' = f/f_c$, ja tehon spektraalitiheys saadaan watteina per megahertsi. Tämä tulee jakaa kertoimella f_c , jotta saadaan se vakioyksikössä watteina per hertsi.



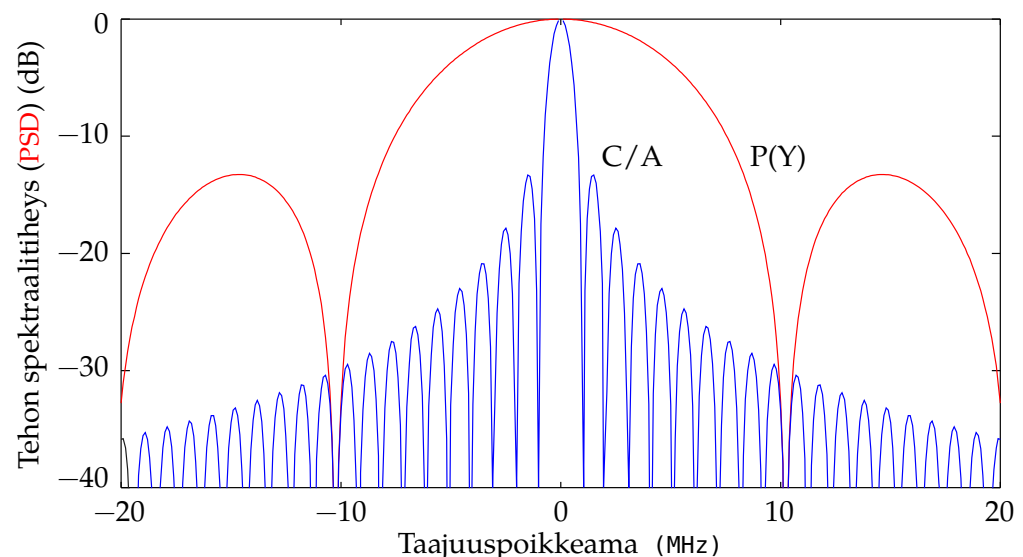
TAULU 7.5. GPS-signaalin tehospektri: laskennan koodi.

```
f = -20:0.1:20;
psdP = (sin(pi.*f/10.23)./(pi.*f/10.23)).^2;
psdCA = (sin(pi.*f/1.023)./(pi.*f/1.023)).^2;
hold on
axis([-20 20 -40 0])
plot(f, 10*log(psdP)/log(10), '-m')
plot(f, 10*log(psdCA)/log(10), '-b')
xlabel('Taajuuspoikkeama (MHz)')
ylabel('Tehon spektraalitiheys (PSD) (dB)')
print 'GPS-PSD.pdf', '-dpdf'
```

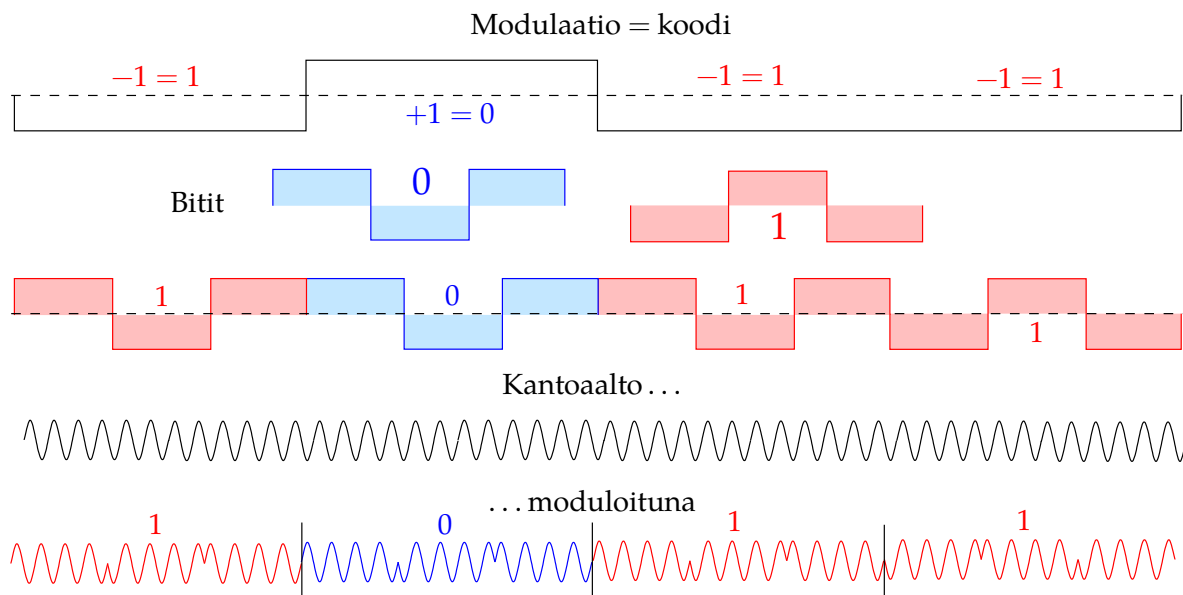
carrier modulation eli binaarinen offset kantaaltomodulaatio. Myös GPS-järjestelmän uusi M-koodi käyttää tätä uutta tekniikkaa.

Alkuperäisessä BPSK-tekniikassa jokaista bittiä edustaa yksi blokki, jonka arvo on joko +1 tai −1 riippuen siitä, onko kyseessä bitti 0 vai bitti 1. Näin saatu blokkifunktio kerrotaan kantaallon kanssa, jolloin tuloksena on 180°:een vaiheinversio kun bitti 0 tulee bitin 1 jälkeen tai toisinpäin.

BOC:n tapauksessa erilaista on, että yhden blokin sijasta jokaista bittiä edustaa (esimerkiksi) kolmen blokin rykelmä, katso kuva 7.12. Lisäksi tässä esimerkkitapauksessa (kun bitin aliblokkien lukumäärä on



KUVA 7.11. Alkuperäisen GPS-signaalin tehospektri.



KUVA 7.12. BOC, binaarinen offset kantaaltomodulaatio. Esimerkki.

pariton) jokaisella bittirajalla on ylimääräinen vaiheinversio. Nettotulos on, että vaihe-inversio on ainoastaan bittirajoilla 1–1 ja 0–0, muttei bittirajoilla 0–1 tai 1–0.

On mahdollista suunnitella BOC-modulaatioita, joilla valtaosa signaalin tehosta menee kahteen sivukaistaan kantaallon molemmin puolin. Sivukaistojen keskellä ovat ”alikantaallot”, joiden taajuuden ero kantaallosta on (tässä esimerkissä) $1,5 \times$ kooditaajuutta. Kantaallon lähistöön jää vain vähän tehoa. Tämä helpottaa signaalin erottamista signaaleista, jotka ovat jo moduloituina samaan kantaaltoon BPSK-tekniikalla, joka laittaa tehostaan valtaosan kantaallon lähelle. Näin on asian laita Galileon E1-signaalille, jonka kantaallolla on sama taajuus kuin GPS:n L1-kantaallolla. Sama pätee GPS-järjestelmän uudelle M-koodille, joka taajuudella L1 on päällekkäin jo olemassa olevien C/A- ja P(Y)-koodien BPSK-modulaatioiden kanssa⁵.

Tutkitaan esimerkiksi bittifunktiota, joka koostuu kahdesta blokista:

$$B_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{jos } t \in (-\frac{1}{2}, 0), \\ -1 & \text{jos } t \in (0, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

⁵Sotilaallisesta näkökulmasta etuna on, että he voivat valikoivasti häiritä C/A-koodia kieltäen sen ja P-koodin käytön viholliselta, samalla kun he itse jatkavat M-koodin käyttöä.

Tässä tapauksessa Fourier'n muunnos on

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{B_2\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_2(t) e^{-2\pi i f t} dt = \\
 &= \int_{-1/2}^0 e^{-2\pi i f t} dt - \int_0^{+1/2} e^{-2\pi i f t} dt = \\
 &= -\frac{1}{2\pi i f} [e^{-2\pi i f t}]_{-1/2}^0 + \frac{1}{2\pi i f} [e^{-2\pi i f t}]_0^{+1/2} = \\
 &= \frac{1}{2\pi i f} (e^{\pi i f} - 2 + e^{-\pi i f}) = \frac{1}{2\pi i f} e^{-\pi i f} (e^{\pi i f} - 1)^2 = \\
 &= \frac{2i}{\pi f} \left(\frac{e^{\pi i f/2} - e^{-\pi i f/2}}{2i} \right)^2 = i \frac{\sin^2(\pi f/2)}{\pi f/2}.
 \end{aligned}$$

Identiteetillä $\sin \pi f = 2 \sin(\pi f/2) \cos(\pi f/2)$ saadaan

$$\mathcal{F}\{B_2\} = i \frac{\sin(\pi f) \sin(\pi f/2)}{\pi f \cos(\pi f/2)},$$

kirjallisuuden standardimuoto.

Tämä Fourier'n muunnos on puhtaasti imaginaarinen, koska B_2 on antisymmetrinen. Symmetrisille funktioille autokovarianssifunktio ja itsekonvoluutio ovat samoja; antisymmetrisille funktioille ne ovat toistensa vastafunktiot, katso yhtälö 2.19. Siis tehon spektraalitiheys on

$$\mathcal{A}_C(f) = \mathcal{F}\{A_C\} = \mathcal{F}\{(-B_2) \otimes B_2\} = \left(\frac{\sin(\pi f) \sin(\pi f/2)}{\pi f \cos(\pi f/2)} \right)^2.$$

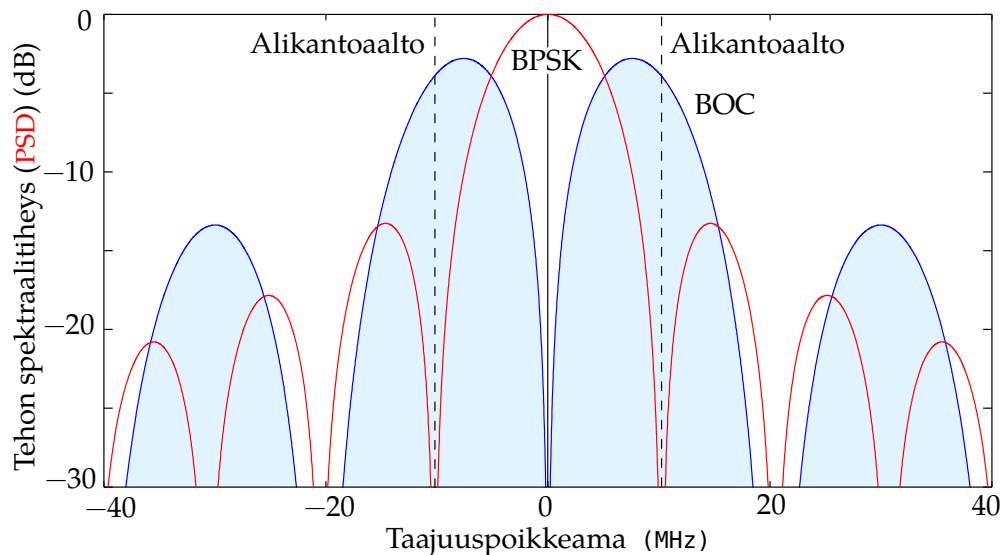
Kuvassa 7.13 näkyy, miten tehoa siirtyy pois kantaallon lähistöltä. Galileo käyttää BOCin toteutusta nimeltä AltBOC, Shivaramaiah ja Dempster (2009).

Suosittu symbolinen merkintätapa BOC-modulaatioille on $\text{BOC}(f_s, f_c)$, jossa f_s on alikantaallon taajuus, joka samalla on puolet blokkien määrästä sekunnissa, ja f_c on koodibittien eli tiedon yksiköiden määrä sekunnissa. Tällä merkintätavalla yleinen tehon spektraalitiheyden yhtälö on

$$\mathcal{A}_C(f) = f_c \left(\frac{\sin(\pi f/f_c) \sin(\pi f/2f_s)}{\pi f \cos(\pi f/2f_s)} \right)^2,$$

katso Ma ym. (2020). Tämä on tavallisin BOCin variantti, josta käytetään myös nimeä $\text{BOC}_{\sin}(f_s, f_c)$ eli "sini-BOC".

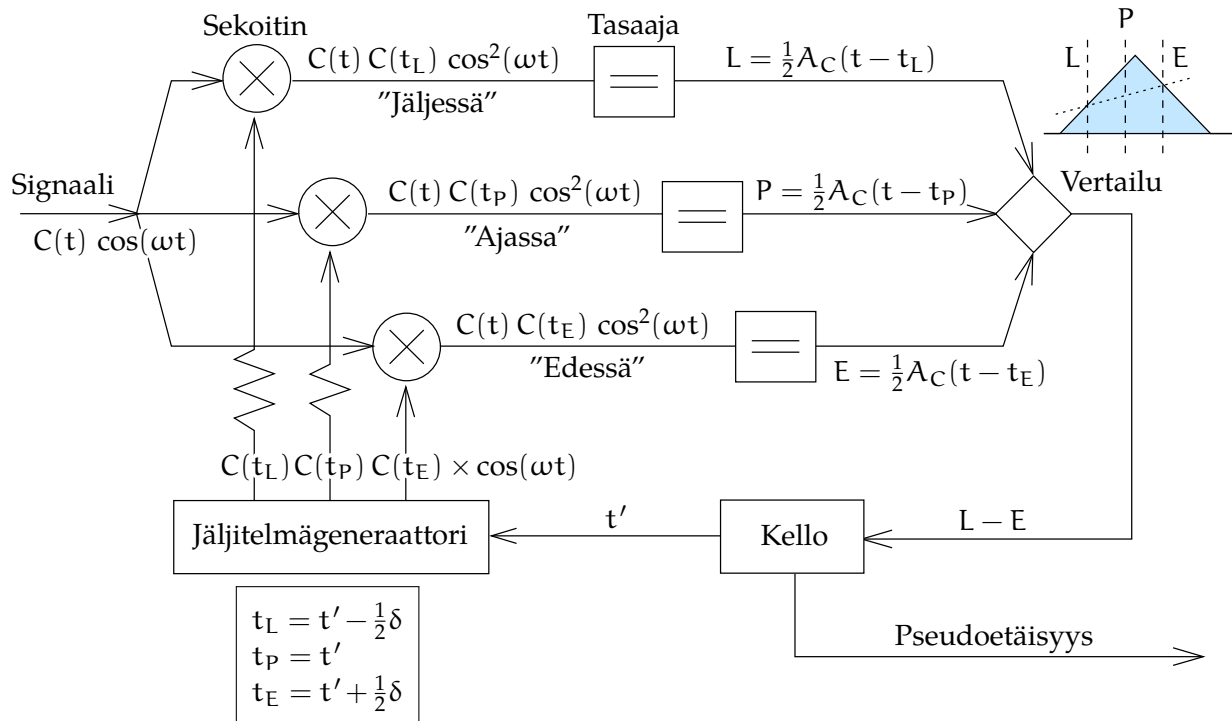




KUVA 7.13. Esimerkki siitä, miten BOC siirtää tehoa sivukaistoihin.

7.7 Koodin ja kantoaallon vaiheen mittaus

Koodijakokanavoinnin (CDMA) käytön takia maanpinnalla olevan GPS-vastaanottimen antenni vastaanottaa signaaleja kaikista paikallisella taivaalla olevista GPS-satelliiteista, jotka lähettävät samoilla kantoaallo-



KUVA 7.14. GNSS-koodiseuranta.

taajuuksilla. Koska lähetysteho on rajallinen ja se on jaettava tasaisesti maapallon yhden pallonpuoliskon yli, vastaanottimen on oltava todella herkkä. Siksi vastaanotettu signaali esivahvistetaan jo antennissa.

Ennen lisävahvistusta signaali kerrotaan eli *sekoitetaan* vastaanottimen kellon vertaustaajuuden kanssa. Tämä tuottaa kaksi johdannaissignaalia taajuuksilla, jotka ovat signaalin ja vertaustaajuuden summa ja ero. Näistä erottaajuus, jota kutsutaan myös *välitaajuudeksi*, kulkee kaistanpäästösuotimen läpi, joka auttaa myös vaimentamaan ulkopuolisia häiriöitä. Tätä välitaajuussignaalia vahvistetaan edelleen ilman vaaraa, että vahvistettu signaali vuotaisi takaisin antenniin, mitä kutsutaan *ylikuulumiseksi*. Vasta sitten vahvistettu signaali lähetetään eteenpäin vastaanottimen käsiteltäväksi.

Koodimittaus on suhteellisen helppoa *korrelaattorilla*, joka korreloi vastaanotettua signaalia vastaanottimessa itse generoitujen signaalien kanssa. Korrelaattorina toimii yleensä niin sanottu **DLL** eli *delay-locked loop*, viivelukittu silmukka.

Jokaisella **GNSS**-satelliitilla on oma näennäissatunnaiskoodi, joka eroaa kaikkien muiden satelliittien koodeista tavalla, joka tekee niiden erottamisen mahdollisimman helpoksi. Korrelaattorissa generoidaan kolme synteettistä signaalia eli ”jäljitelmää” jokaiselle satelliitille: E (*early*), L (*late*) ja P (*prompt*). Katso kuva 7.14. Aikaero δ E:n ja L:n välillä on yhden koodibitin pituinen, **GPS**:n C/A-koodin tapauksessa mikrosekunnin. Jokainen generoitu signaali kerrotaan eli sekoitetaan saapuvan satelliittisignaalin kanssa. Tulos on kahden signaalin *korrelatio*: arvo, joka on positiivinen vain, jos signaalit ovat melkein synkrooneja⁶.

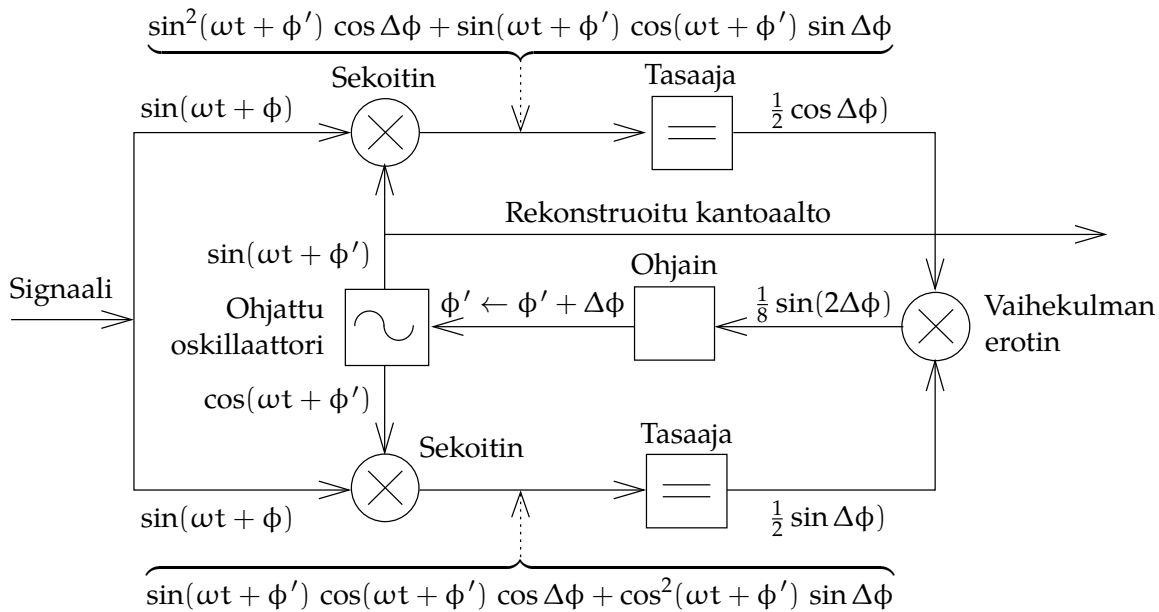
Kuva 7.10 näyttää näennäissatunnaiskoodin autokovarianssifunktion kolmiomuodon. Ristikovarianssifunktio signaalin ja jäljitelmän välillä on (olettaen koherentti **DLL**) identtinen. Siis tapauksessa, jossa synkronointi on kohdallaan, pätee $P = 100\%$, $E = L = 50\%$. Ero $E - L$ välillä $(-1, +1)$ kielii epäsynkronisuudesta.

Jos E-sekoitin antaa korkean arvon, on koodigeneraattorin kello edellä, ja sitä on hidastettava. Jos päinvastoin L-sekoitin antaa korkeamman arvon, koodigeneraattorin kelloa on nopeutettava.

Kantaaallon vaiheen mittaus on kuluttajatason laitteissa epätavallista

⁶Tässä oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että sisään tulevan signaalin ja jäljitelmäsignaalin kantaaltojen vaiheet on jo synkronoitu. Jos tämä *koherentin* **DLL**:n oletamus ei päde, on käytettävä monimutkaisempaa mutta myös robustimpaa *epäkoherenttia* **DLL**:ää.





KUVA 7.15. Costasin diskriminaattorin eli silmukan suorittama kantoaallon vaiheen seuranta.

ja myös hankalampaa. Tarkoitusta palvelee yleensä niin sanottu PLL eli *phase-locked loop*, vaihelukittu silmukka.

Usein käytetty vaiheseurannan ratkaisu on niin sanottu Costasin⁷ diskriminaattori eli silmukka. Se havaitsee kantoaallon vaiheen poikkeaman vastaanottimen vertausoskillaattorista ja ohjaa vastaanottimen vertaustaajuutta niin, että ero häviää. Tämä vertaustaajuus havaitaan ja integroidaan kantaaltovaiheen havaintosuureeksi.

Costasin silmukan käsitteellinen kaavio on kuvassa 7.15. Nähdään, miten sisään tuleva signaali "sekoitetaan" eli kerrotaan generoitujen vertauskantoaallon kopioiden kanssa, joiden välinen vaihe-ero on 90° eli $\pi/2$. Sekoitustoimien ulostulot tasataan, minkä jälkeen vaihekulman erotin tulkitsee ne eron $\Delta\phi = \phi - \phi'$ sini- ja kosinikomponentteiksi. Ero on vertausvaihepoikkeaman ϕ' ja etsityn signaalin vaihepoikkeaman ϕ välillä.

Vaihe-erotin antaa ulos sen syöttösignaalien $\frac{1}{2} \cos \Delta\phi$ ja $\frac{1}{2} \sin \Delta\phi$ tulon $\frac{1}{8} \sin(2\Delta\phi)$. Tämä on vertauskantoaallon generaattorin ohjaussignaali, jonka taajuutta ohjataan eron nollaamiseksi.

Costasin diskriminaattori ei osaa tehdä eroa kantoaallon ja miinus

⁷John Peter Costas (1923–2008) oli amerikkalainen sähköinsinööri. Hänen kuuluisa keksintönsä, Costasin silmukka, oli paremman radiovastaanottimen suunnittelun tulos (Costas, 1956).

kantaaallon, eli määrällä $180^\circ = \pi$ vaihesiirretyn kantaaallon, välillä: $\Delta\phi = \pi + \delta\phi \implies \sin(2\Delta\phi) = \sin(2\delta\phi)$. Tämä merkitsee, että sen kokonaistuntemattomien yksikkö on puoli aallonpituutta, $\lambda/2$.

Tämä myös merkitsee, että Costasin diskriminaattori on hyvä tapa ”demoduloida” sisään tuleva signaali eli poistaa koodit kantaaallolta: ohjatun oskillaattorin ulostulo on moduloimaton kantaaalto. Toinen yksinkertainen tapa saavuttaa tämä olisi ”neliöidä” signaali kertomalla se itsensä kanssa. Näin vaiheinversiot 180° vain häviävät, ja kaikki modulaatiot, kuten näennäissatunnaiskoodit ja navigointiviesti, häviävät kantaaallosta. Näin tapahtuu navigointiviestiä lukuun ottamatta myös silloin, jos sisään tuleva signaali kerrotaan synkronoidun jäljitelmäsignaalin kanssa.

Sekä koodi- että vaiheseurantapiirissä on komponentteja, joita kutsutaan ”tasaajiksi”. Niitä voidaan kutsua myös integraattoreiksi, keskiarvoistajiksi tai alipäästösuotimiksi. Ne voidaan kuvata käsitteellisesti yhtälöllä

$$\frac{d}{dt}\underline{y}(t) = -\frac{\underline{y}(t)}{T} + \underline{x}(t). \quad (7.7)$$

Tässä T on tasaajaa luonnehtiva aikaskaala. Lähtöprosessi on $\underline{x}(t)$, ja tasattu tulosprosessi on $\underline{y}(t)$.

Yhtälö 7.7 muistuttaa Gaussin ja Markovin prosessia, yhtälö 2.25, jossa aikaskaala on $T = 1/k$. Kuitenkin $\underline{x}(t)$ on yleinen prosessi, toisin kuin $\underline{n}(t)$, joka on valkoista kohinaa. Myös yleinen ratkaisu on sama, yhtälö 2.26:

$$\underline{y}(t) = \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \left(\underline{y}(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T}\right) + \int_{t_0}^t \underline{x}(\tau) \exp\left(\frac{\tau}{T}\right) d\tau \right).$$

Tässä näkyy, miten lähtöprosessin arvot $\underline{x}(\tau)$ vaimentuvat aikaa myöten suhteessa

$$\exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right),$$

jossa $t - \tau$ on arvon $\underline{x}(\tau)$ ikä. Tätä kutsutaan myös ”häipyvän muistin suotimeksi”. Mitä pidempi on T , sitä suurempi on arvojen $\underline{x}(\tau)$ joukko, jonka yli integraali keskiarvottaa.

Signaalin ja jäljitelmän välisten ajallisten vaihe-erojen ja koodiviiheiden tarkan määrittämisen kannalta tasausajan T on oltava pitkä. Tämä aiheuttaa kuitenkin hankaluuksia niin sanotuissa korkean dynamiikan sovelluksissa, kuten nopealiikkeisissä taistelukoneissa, joissa vastaanotetun GNSS-signaalin dopplersiirtymä vaihtelee nopeasti ja

ennakoimattomasti. Liian pitkällä tasausajalla seurantasilmukat menettävät saapuvan signaalin lukituksen. Tästä syystä korkean dynamiikan käyttöön tarkoitettujen vastaanottimien tasausajat ovat lyhyet, mutta samalla herkkyys on huonompi ja mittausepävarmuus korkeampi.

Toinen lähestymistapa korkean dynamiikan käsittelyyn on GNSS:n integrointi anturin kanssa, joka pystyy itsenäisesti määrittämään dopplersiirtymän muutokset: laite on inertiamittausyksikkö (IMU). Tähän kelpaa jopa yksinkertainen ja halpa malli.



7.8 Kellon mallinnus

Kellot, kuten GNSS-satelliiteissa olevat atomikellot, mallinnetaan tavallisesti satunnaiskulkuina, katso yhtälö 2.22. Olkoon $c(t)$ kellolukeman poikkeama oikeasta ajasta hetkellä t . Oleta, että kello sisältää värähtelijän, jonka nimellinen taajuus on f_0 . Silloin vaihekulma hetkellä t on radiaaneina

$$\phi(t) = 2\pi f_0 t + \Delta\phi(t),$$

jossa $\Delta\phi(t)$ on vaihepoikkeama. Kellopoikkeama on sekunteina

$$c(t) = \frac{\Delta\phi(t)}{2\pi f_0}.$$

Taajuuspoikkeama $\Delta f(t)$ on hertseinä

$$f(t) = f_0 + \Delta f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Delta\phi(t) = f_0 + f_0 \frac{d}{dt} c(t).$$

Normalisoitu taajuuspoikkeama eli kellon käynti on dimensioton luku⁸:

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta f(t)}{f_0} = \frac{d}{dt} c(t). \quad (7.8)$$

Usein oletetaan, että funktio $d(t)$ käyttäytyy valkoisen kohinan tavoin, jolloin yhtälöiden 2.22 ja 7.8 perusteella kellopoikkeama $c(t)$ käyttäytyy kuin satunnaiskulku. Olkoon kellon käynnin $\underline{d}(t)$ autokovarianssifunktio, yhtälö 2.20:

$$A_d(t, t') = Q_d \delta(t - t'),$$

jossa δ on Diracin deltafunktio ja Q_d oletettu varianssi. Yhtälöstä 2.23 seuraa, että kellopoikkeaman c autokovarianssi on

$$A_{c,0}(t, t') = Q_d \cdot (t' - t_0), \quad (7.9)$$

⁸Tulkinta voi olla Hz/Hz tai s/s.

jossa t_0 on sopiva aloitusaika. Nähdään, että varianssi kasvaa lineaarisesti ajassa.

Käynnin $\underline{d}(t)$ keskiarvo otosvälillä $\tau = t_i - t_{i-1}$ on

$$\langle \underline{d} \rangle_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underline{d}(t) dt = \frac{1}{\tau} (\underline{c}(t_i) - \underline{c}(t_{i-1})). \quad (7.10)$$

Nyt Allanin varianssi määritellään seuraavasti⁹:

$$\sigma_A^2(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} E \left\{ (\langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i)^2 \right\}. \quad (7.11)$$

Suure on nimetty David W. Allanin¹⁰ mukaan¹¹ (*Allan's Time*).

Se voidaan kirjoittaa myös kellopoikkeaman \underline{c} funktiona:

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} E \left\{ (\underline{c}(t_{i+1}) - 2\underline{c}(t_i) + \underline{c}(t_{i-1}))^2 \right\}.$$

Empiirinen estimaattori voidaan muodostaa esimerkiksi näin:

$$\widehat{\sigma}_A^2(\tau) = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (\langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i)^2.$$

Allanin varianssin neliöjuurta $\sigma_A(\tau)$ kutsutaan *Allanin keskihajonnaksi*.

Koska $E\{\underline{d}\} = 0$, myös

$$E\{\langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i\} = 0,$$

ja yhtälöstä 7.11 tulee

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{1}{2} \text{Var}\{\langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i\}. \quad (7.12)$$

Jos kellopoikkeama $\underline{c}(t)$ on oikea satunnaiskulku, varianssit ovat yhtälöiden 7.10 ja 7.9 perusteella

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\langle \underline{d} \rangle_i\} &= \frac{1}{\tau^2} \text{Var}\{\underline{c}(t_i) - \underline{c}(t_{i-1})\} = \\ &= \frac{1}{\tau^2} (\text{Var}\{\underline{c}(t_i)\} + \text{Var}\{\underline{c}(t_{i-1})\} - 2 \text{Cov}\{\underline{c}(t_i), \underline{c}(t_{i-1})\}) = \\ &= \frac{1}{\tau^2} (Q_d \cdot (t_i - t_0) + Q_d \cdot (t_{i-1} - t_0) - 2Q_d \cdot (t_{i-1} - t_0)) = \\ &= \frac{1}{\tau^2} Q_d \cdot (t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{\tau} Q_d, \end{aligned}$$

⁹Kirjallisuudessa käytetään symbolia $\sigma_y^2(\tau)$.

¹⁰David Wayne Allan (s. 1934) on amerikkalainen atomikellofysiikko.

¹¹Paikkatietoanalyysin tuntijat tunnistavat tämän varmasti samanlaiseksi kuin krigingin menetelmän *semivariogrammi*.



ja siis

$$\text{Var}\{\langle \underline{d} \rangle_{i+1}\} = \text{Var}\{\langle \underline{d} \rangle_i\} = \frac{1}{\tau} Q_d, \quad (7.13)$$

ja kovarianssi on ilmeisesti

$$\text{Cov}\{\langle \underline{d} \rangle_i, \langle \underline{d} \rangle_{i+1}\} = 0, \quad (7.14)$$

koska kaikki $\{\langle \underline{d}(t) \rangle | t \in (t_{i-1}, t_i)\}$ ovat korreloimattomia kaikkien $\{\langle \underline{d}(t) \rangle | t \in (t_i, t_{i+1})\}$ kanssa.

Kirjoita auki yhtälö 7.12 ja sijoita yhtälöt 7.13 ja 7.14:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2(\tau) &= \frac{1}{2} \text{Var}\{\langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i\} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Var}\{\langle \underline{d} \rangle_{i+1}\} + \frac{1}{2} \text{Var}\{\langle \underline{d} \rangle_i\} - 2 \cdot \frac{1}{2} \text{Cov}\{\langle \underline{d} \rangle_i, \langle \underline{d} \rangle_{i+1}\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} Q_d + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} Q_d - 0 = \frac{1}{\tau} Q_d. \end{aligned}$$

Tämä on valkoisen taajuuskohinan potenssilaki.

Kaksoislogaritmisessa kuvaajassa, jossa on $\sigma_A^2(\tau)$ vastaan τ , tämä on kulmalla 45° alaspäin suuntaava suora. Tämän kuvaajan piirtäminen on yleisesti sovittu tapa luonnehtia kellojen käyttäytymistä (Allan, 1966).

Oikeat kellot käyttäytyvät tavallisesti tällä tavalla, jos otosväli τ on lyhyt. Pidemmillä otosväleillä taajuuden ryömintä taivuttaa käyrää ylöspäin.

Vaikka Allanin varianssi keksittiin alun perin kellojen luonnehtimiseksi, sitä käytetään myös gyroskooppien ja kiihtyvyysmittareiden yhteydessä.



7.9 Vaihetuettu koodimittaus

Tässä menetelmässä absoluuttinen pseudoetäisyys tulee koodimittauksesta, mutta sen aallonpituuden jakojäännös vaihemittauksesta. GPS:n kinemaattisissa sovelluksissa on usein hyödyllistä *tasata* raa'at pseudoetäisyyden koodimittaukset käyttämällä paljon tasaisempia ja geometrisesti tarkempia kantoaallon vaihemittauksia, vaikka ne periaatteessa sisältävät kokonaistuntemattomia.

Olkoon annettuna koodin pseudoetäisyshavainnot p_1 ja p_2 metreinä ja kantoaallon vaihehavainnot ϕ_1 ja ϕ_2 kulmayksiköissä, siis radiaaneina epookeilla $t_k, k = 1, 2, \dots$

Ensin konstruoidaan *ennustusyhtälö* tämän hetken *a priori* pseudoetäisyydelle käyttäen edellistä *a posteriori* pseudoetäisyyttä:

$$p^-(t_k) = p^+(t_{k-1}) + \frac{\lambda}{2\pi} (\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})). \quad (7.15)$$



Tämä yhtälö pätee molemmille taajuuksille L_1 ja L_2 sekä *widelane*- eli leveäkuja-havaintosuureille, joiden määritelmä on

$$p_{WL} = \frac{f_1 p_1 - f_2 p_2}{f_1 - f_2}, \quad \phi_{WL} = \phi_1 - \phi_2.$$

Yhtälö 7.15 voidaan ymmärtää Kalmanin suotimen *dynaamiseksi malliksi*: tila on pseudoetäisyys $\underline{p}(t)$. Vaiheen muutostermi $\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})$ voidaan katsoa tunnetuksi, koska vaihemittaukset ovat tarkkoja koodimittauksiin verrattuna.

Seuraavaksi lisätään Kalmanin suotimeen *havaintoyhtälö*: havainto on yksinkertaisesti tämän hetken pseudoetäisyys

$$\underline{\ell} = \underline{p}(t_k) + \underline{m},$$

jonka tarkkuus annetaan havainnon varianssina $R = \text{Var}\{\underline{m}\} = E\{\underline{m}^2\}$. *Päivitysyhtälö* on

$$\underline{p}^+(t_k) = \underline{p}^-(t_k) - KH(\underline{p}^-(t_k) - \underline{\ell}),$$

jossa

$$H = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

$$K = \Sigma^- H^T (H \Sigma^- H^T + R)^{-1} = \frac{\Sigma^-}{(\Sigma^- + R)},$$

ja siis

$$\underline{p}^+(t_k) = \frac{\overbrace{R}^W}{\Sigma^-(t_k) + R} \underline{p}^-(t_k) + \frac{\overbrace{\Sigma^-(t_k)}^w}{\Sigma^-(t_k) + R} \underline{\ell}.$$

Siis *a posteriori* pseudoetäisyys on toisaalta ennustetun ja vaihemittausten avulla tasatun *a priori* pseudoetäisyyden, toisaalta suoraan havaitun pseudoetäisyyden painotettu keskiarvo. Painot W ja w täyttävät ehdon

$$W + w = 1,$$

katso alaosio 2.2.3.

Varianssin päivitys antaa

$$\Sigma^+(t_k) = (I - KH) \Sigma^-(t_k) = \frac{R}{\Sigma^-(t_k) + R} \Sigma^-(t_k).$$

Dynaamisen mallin varianssin kasautuminen epookista seuraavaan on yksinkertaisesti $\Sigma^-(t_k) = \Sigma^+(t_{k-1})$.



Tässä menetelmässä voi *testata, onko tapahtunut vaihekatkoja*: testattava suure on erotus eli nollasuure

$$\underline{y} = (\underline{p}^-(t_k) - \underline{\ell}),$$

jonka keskivirhe on tiedossa:

$$\sigma_y = \sqrt{H\Sigma^-H^T + R} = \sqrt{\Sigma^- + R}.$$

Tämä toimii parhaiten leveäkuja-lineaariyhdistelmää käyttäen sen suuren tehollisen aallonpituuden (86 cm) ansiosta.

Tämä Kalmanin suodin voi pyöriä jatkuvana prosessina vastaanotimessa tai, ilman tosiaikaisuuden etua, jälkikäsitteilyohjelmistossa. Suotimen tuottama estimaattori $\{p^-(t) | t \in [t_{k-1}, t_k]\} \stackrel{\text{def}}{=} p^-(t_k), k = 2, 3, \dots$ on merkittävästi tasaisempi kuin raakahavaintojen aikasarja $p(t_k) + \underline{m}$.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mitä modulaatiotekniikka käytettiin alun perin GPS-järjestelmän lähetyksissä?
- 2) Mitkä ovat vastaanotetun GPS-signaalin relativistisen taajuussiirtymän kaksi osaa?
- 3) Kuvaile kantoaaltovaiheen kelauksen ilmiötä.
- 4) Mitä ovat Goldin koodit? Mitä tarkoittaa, että ne ovat keskenään melkein ortogonaalisia?
- 5) Kuinka GPS-vastaanotin voi erottaa taivaalla olevien satelliittien signaalit toisistaan, huolimatta siitä, että ne kaikki lähettävät samalla kantoaallon taajuudella?
- 6) Mikä on jäljitelmäkoodi, ja miten koodikorrelaattori toimii?
- 7) Mikä on korkean dynaamiikan ympäristö, ja mikä se vaatii GPS-vastaanottimelta?
- 8) Miksi BOC eli binaarinen offset kantoaaltomodulaatio on hyödyllinen?
- 9) Miten vastaanottimen kello tavallisesti mallinnetaan?
- 10) Mikä on Allanin varianssi?
- 11) Selitä vaihetuettu koodimittaus.



Harjoitus 7 – 1: Bitin edustus kolmella blokillä

Jokaisen koodibitin edustaminen kolmen blokin sarjalla, kuten on esitetty kuvassa 7.12, voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$B_3(t) = \begin{cases} -1 & \text{jos } t \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right), \\ 1 & \text{jos } t \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

- 1) Johda tämän edustuksen tuottaman modulaation tehon spektraalitiheys

$$\mathcal{F}\{(-B_3) \otimes B_3\}.$$

Vihje Kirjoita blokkien sarja vain kahden yksinkertaisen blokin _____ summana.

- 2) Miten muuttaisit sarjan keskiblokin korkeutta niin, että tehon spektraalitiheys origossa $f = 0$ häviäisi?



Tosiaikaiset GNSS-havainnot

8



8.1 GNSS:n havaintoyhtälöt

GNSS-mittauksen havaintoyhtälöitä kehitetään esityönä tosiaikaisten GNSS-havaintojen käyttämiselle navigoinnissa. Aluksi yhtälöt esitetään yleisessä ei-stokastisessa epälineaarissa muodossa, mikä pätee sekä koodin että kantoaallon vaiheen mittaukseen. Sen jälkeen yhtälöt linearisoidaan. Seuraavaksi yhtälöt erikoistetaan valitsemalla, mitkä yhtälön muuttujista ovat tunnettuja ja mitkä tuntemattomia. Jälkimmäiset sisällytetään tuntemattomien vektoriin eli tilavektoriin.

Yhtälöiden ilmakehän parametrit vaativat erikoiskohtelua. Tästä esitetään erillinen analyysi.

Luvun lopussa esitetään differentiaaliset GNSS-mittaukset, mukaan lukien tosiaikainen kinemaattinen mittaustekniikka. Lisäksi esitetään menetelmät ja standardit tietoyhteyden muodostamiseksi liikkuvan GNSS-vastaanottimen ja vertausvastaanottimen välille.



8.1.1 Koodimittauksen havaintoyhtälö

Tavallisin GNSS:n havaintotyyppi on koodimittauksen pseudoetäisyys, jonka yhtälö on

$$p = \rho + c (\Delta T - \Delta t) + d_{\text{ion}} + d_{\text{trop}}, \quad (8.1)$$

jossa

$\rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$ on etäisyys avaruudessa satelliitin paikan $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja maa-aseman eli vastaanottimen paikan $\mathbf{X} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ välillä Pythagoraan lauseen avulla laskettuna.

Δt on satelliitin kellopoikkeama.

ΔT on vastaanottimen kellopoikkeama.

d_{ion} on "ionosfäärin" eli ilmakehän ionisoidun osuuden aiheuttama viive signaalin etenemisessä.

d_{trop} on "troposfäärin" eli ilmakehän neutraalin osuuden aiheuttama etenemisviive.

Etuliite "pseudo" sanassa pseudoetäisyys viittaa kellopoikkeamien Δt ja ΔT läsnäoloon. Niiden takia suure käyttäytyy laskennassa eri tavalla kuin oikeat etäisyydet, jotka havaitaan esimerkiksi laseretäisyysmittauksella.

Yhtälöä 8.1 voidaan kutsua "esihavaintoyhtälöksi". Se sisältää enemmän muuttujia kuin voidaan koskaan määrittää yhdellä laskelmalla. Tästä yhtälöstä voidaan johtaa varsinaisia havaintoyhtälöitä, jotka riippuvat siitä, mitkä ovat tehtävän tuntemattomat eli Kalmanin suotimen estimoitavat suureet. Tuntemattomat, jotka voidaan sisällyttää Kalmanin suotimen tilavektoriin, ovat

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ satelliitin sijainti avaruudessa

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ vastaanottimen sijainti avaruudessa

Δt satelliitin kellopoikkeama

ΔT vastaanottimen kellopoikkeama.

Ilmakehän etenemisparametrien d_{trop} ja d_{ion} sisällyttäminen on ongelmallista. Yhtälön 8.1 muoto näyttää, että jokaisella satelliitilla on omat parametrit d_{trop} ja d_{ion} jokaiselle epookille. Nämä viiveet riippuvat satelliitin korkeuskulmasta. Siksi niitä ei voida ratkaista havainnoista tämän yhtälön avulla, joten oletamme, että korjaukset ovat saatavissa jostakin ulkoisesta lähteestä, esimerkiksi ilmakehämallista.

Sivuuttamalla toistaiseksi ilmakehän parametrit saadaan koodimitauksen esihavaintoyhtälöksi

$$p = \rho + c (\Delta T - \Delta t). \quad (8.2)$$



8.1.2 Kantoaallon vaiheen havaintoyhtälö

Samanlainen yhtälö kuin koodimitauksen pseudoetäisyyden yhtälö 8.1 on olemassa myös kantoaallon vaihehavainnoille:

$$\bar{p} = \lambda \left(\frac{\phi}{2\pi} + N \right) = \lambda \left(\frac{\bar{\phi}}{2\pi} \right) = \rho + c (\Delta T - \Delta t) + D_{\text{ion}} + D_{\text{trop}}, \quad (8.3)$$

jossa



- ϕ on mitattu eli ”raaka” vaihe-erokulma radiaaneissa signaalin lukitushetkellä $\phi(t_0) \in [0, 2\pi)$. Huomaa, että oikeasti tässä mitataan, paljonko vastaanottimen vertausoskillaattorin vaihe on vastaanotetun satelliittisignaalin vaiheen edellä. Kun etäisyys satelliittiin kasvaa, kasvaa myös mitattu vaihekulma.
- $\bar{\phi}$ on vaihe-erokulma mukaan lukien yhtälön 8.3 edellyttämä kokonaisten aallonpituuksien lukumäärä N . Lukua $N \in \mathbb{Z}^1$ kutsutaan ambiguuteetiksi, moniselitteisyydeksi eli *kokonaistuntemattomaksi* ja pätee

$$\bar{\phi} = \phi + 2\pi N.$$

- $\bar{P} = \lambda \bar{\phi} / 2\pi$ on arvoltaan lähellä koodin pseudoetäisyyttä.
- Δt on satelliitin kellopoikkeama.
- ΔT on vastaanottimen kellopoikkeama.
- $\rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$ on satelliitin, paikalla $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ja vastaanottimen, paikalla $\mathbf{X} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, välinen geometrinen etäisyys.
- $D_{\text{ion}}, D_{\text{trop}}$ ovat ”ionosfäärin” ja ”troposfäärin” aiheuttamat etenemisviiveet — itse asiassa $D_{\text{ion}} = -d_{\text{ion}}$ ja $D_{\text{trop}} = d_{\text{trop}}$.
- λ on kantoaallon aallonpituus.

Myös tässä jätämme ilmakehän etenemisparametrit huomioimatta, jolloin esihavaintoyhtälö on

$$\bar{P} = \lambda \left(\frac{\phi}{2\pi} + N \right) = \rho + c (\Delta T - \Delta t). \quad (8.4)$$

8.2 Havaintoyhtälöiden linearisointi

Yllä olevat yhtälöt 8.2 ja 8.4 tulee linearisoida, jotta saadaan Kalmanin suotimen päivitysyhtälöt 3.24, 3.25 ja 3.26:

$$K = \Sigma^- H^T (H \Sigma^- H^T + R)^{-1}, \quad \begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \mathbf{x}^- - K (H \mathbf{x}^- - \underline{\ell}), \\ \Sigma^+ &= (I - KH) \Sigma^-. \end{aligned}$$

¹Puolikokonaisia lukuja voi esiintyä, eli $2N \in \mathbb{Z}$, esimerkiksi Costasin diskriminaattoria käytettäessä, katso osio 7.7.



8.2.1 Vastaanottimien paikkojen estimointi

Oletetaan, että määritettävät tuntemattomat ovat tilavektorin

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta T \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

alkiot. Ne ovat vastaanottimen paikkakoordinaatit X, Y ja Z sekä vastaanottimen kellon poikkeama ΔT . Oletamme siis, että satelliitin sijaintia \mathbf{x} ja kellopoikkeamaa Δt ei ole tarkoitettu määritettäväiksi, vaan ne tunnetaan.

Valitaan seuraava likiarvojen eli vertausarvojen joukko:

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= \rho^{(0)} + c (\Delta T^{(0)} - \Delta t), \\ \rho^{(0)} &= \sqrt{(x - X^{(0)})^2 + (y - Y^{(0)})^2 + (z - Z^{(0)})^2}, \quad \Delta T^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Tämä merkitsee likimääräisen tilavektorin

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

muodostamista, jossa $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} X^{(0)} & Y^{(0)} & Z^{(0)} \end{bmatrix}^T$.

Vähennetään yhtälö 8.6 yhtälöstä 8.2, kehitään Taylorin sarjaksi ja tunnistetaan tutulla tavalla määritellyt deltasuureet

$$\Delta X \stackrel{\text{def}}{=} X - X^{(0)}, \quad \Delta Y \stackrel{\text{def}}{=} Y - Y^{(0)}, \quad \Delta Z \stackrel{\text{def}}{=} Z - Z^{(0)},$$

ja

$$\begin{aligned} \Delta p &\stackrel{\text{def}}{=} p - p^{(0)} \approx \\ &\approx \left. \frac{\partial p}{\partial X} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} \Delta X + \left. \frac{\partial p}{\partial Y} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} \Delta Y + \left. \frac{\partial p}{\partial Z} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} \Delta Z + c \Delta T. \end{aligned}$$

Tunnistetaan havaintomatriisi ja lasketaan osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial X} & \frac{\partial p}{\partial Y} & \frac{\partial p}{\partial Z} & \frac{\partial p}{\partial \Delta T} \end{bmatrix}^{(0)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{X - x}{\rho} & \frac{Y - y}{\rho} & \frac{Z - z}{\rho} & c \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}}{\rho} & c \end{bmatrix}^{(0)}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

Kalmanin suotimen rakenne- eli havaintomatriisi.

Linearisoitu tilavektori saadaan vähentämällä yhtälö 8.7 yhtälöstä 8.5:

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta X & \Delta Y & \Delta Z & \Delta T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta T \end{bmatrix}. \quad (8.9)$$



Kaikki alkioit ovat ajan funktioita.

Oletetaan, että tietyllä ajan hetkellä t havaitaan joku tilavektorin funktio. Linearisoitu havaintoyhtälö on stokastisena yhtälönä

$$\underline{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \underline{p} = H \underline{x}(t) + \underline{m}, \quad (8.10)$$

jossa H ja $\underline{x}(t)$ ovat yllä määriteltyjä ja \underline{m} on havainnon satunnainen virhe eli kohina.

Voimme tutkia epookeittain, kuinka tarkasti havainnot kykenevät määrittämään tilavektorin ratkaisun 8.9. Jos on n pseudoetäisyshavaintoa eri satelliitteihin, havaintoyhtälöstä tulee

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \underline{m}_1 \\ \underline{m}_2 \\ \vdots \\ \underline{m}_n \end{bmatrix}.$$

Oletus, että havainnot ovat tilastollisesti riippumattomia ja että kaikkien keskivirhe on sama² σ — matemaattikkokielellä *i.i.d.*-oletus — antaa luvan käyttää tavallista pienimmän neliösumman ratkaisumenetelmää. Ratkaisu on

$$\hat{\underline{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{\ell}$$

ja sen varianssimatriisi

$$\text{Var}\{\hat{\underline{x}}\} = \sigma^2 (A^T A)^{-1}.$$

Huomion arvoista on, että matriisi $(A^T A)^{-1}$ on täysin satelliittigeometrian määrittämä, toisin sanoen se riippuu siitä, missä jokainen satelliitti on havaitsijan taivaalla. Kaikki muut tekijät, jotka vaikuttavat ratkaisun $\hat{\underline{x}}$ epävarmuuteen, kuten vastaanottimen laatu ja mittausolosuhteet, sisältyvät tehdyn oletuksen takia lukuun σ , jota kutsutaan painoyksikön keskivirheeksi.

Matriisi $(A^T A)^{-1}$ kertoo, kuinka tarkkaan tuntemattomat voidaan määrittää: jokaisen tuntemattoman varianssi on yhtä kuin matriisin $(A^T A)^{-1}$ vastaava päälävistäjäalkio kerrottuna arvolla σ^2 . GNSS-havaintogeometrian laadun analysoimiseksi usein käytetyt niin sanotut DOP-suureet ovat näiden päälävistäjäalkioiden eri summia.

Osiassa 8.4 esitetään tilavektorin kehitystä ajassa Kalmanin suotimesa.

²Tämä on fysikaalisesti epärealistista: havaintoepävarmuus on paljon suurempi, jos satelliitti on lähellä horisonttia. Tämä johtuu signaalin pitemmästä polusta ilmakehässä.





8.2.2 Satelliittien paikkojen estimointi

Satelliitin hetkellinen paikka \mathbf{x} ja kellopoikkeama Δt oletetaan tunnetuiksi eli laskettaviksi ratatiedoista. Tämä oletus ei pidä paikkaansa tarkasti. Osiossa 8.5 esitetään, miten tämä oletus lievennetään käyttämällä differentiaaliitekniikkaa tukiasemineen.

Käsitteellinen lähestymistapa tähän on katsoa tukiaseman havainnot havainnoiksi, joilla määritetään satelliitin tuntemattomat x, y, z ja Δt , kun tukiaseman koordinaatit X, Y ja Z ovat tiedossa. Tämän tehtävän H-matriisi on

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{X}-\mathbf{x}}{\rho} & c & -c \end{bmatrix}^{(0)}$$

ja vastaava tilavektori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta T & \Delta t \end{bmatrix}^T. \quad (8.11)$$

Sen jälkeen tämän tilavektorin alkioden Δx ja Δt estimaatteja käytetään lähetettyjen ratatietojen (*broadcast ephemerisin*) korjaamiseksi, ennen niiden käyttöä liikkuvan vastaanottimen eli *roverin* paikan laskennassa.

Yhtälö 8.11 on myös tilavektorin yleinen muoto, kun estimoidaan satelliittien kiertoratoja käyttäen pseudoetäisyyshavaintoja tunnetuilta seuranta-asemilta. Tosin jos asemilla on synkronoidut atomikellot, kello-tuntemattomat ΔT putoavat pois.



8.2.3 Kantoaallon vaihe havaintosuureena

Kantoaallon vaiheen havaintosuureen $P \stackrel{\text{def}}{=} \bar{P} - \lambda N$ tapauksessa, yhtälö 8.4, kokonaistuntemattoman ("ambiguiteetin" eli moniselitteisyysluvun) N pitää sisällyttää linearisoituun havaintoyhtälöön, jolloin tuloksena on

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial X} & \frac{\partial P}{\partial Y} & \frac{\partial P}{\partial Z} & \frac{\partial P}{\partial \Delta T} & \frac{\partial P}{\partial N} \end{bmatrix}^{(0)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{X-x}{\rho} & \frac{Y-y}{\rho} & \frac{Z-z}{\rho} & c & -\lambda \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}-\mathbf{x}}{\rho} & c & -\lambda \end{bmatrix}^{(0)}. \end{aligned}$$

Vastaava tilavektori on

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta X & \Delta Y & \Delta Z & \Delta T & \Delta N \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta T \\ \Delta N \end{bmatrix}.$$

Kaikissa tapauksissa syntyy yksi linearisoitu havaintoyhtälö jokaista satelliittia ja havaintotaajuutta (GPS:n tapauksessa L1, L2 tai L5) kohti.



Kalmanin suotimessa on sallittua käsitellä kaikki havainnot erikseen ja peräkkäin, vaikka ne on tehty samanaikaisesti. Tämä edellyttää, että ne ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan.



8.3 Ilmakehän mallinnus

Ilmakehän etenemisviiveet jaetaan tavallisesti viiveisiin, jotka johtuvat "ionosfääristä", ilmakehän ionisoidusta osuudesta, ja "troposfääristä" eli neutraalista ilmakehästä, joka sisältää myös stratosfääriin.

Kyseiset mekanismit ovat hyvin erilaisia.



8.3.1 Ionosfääri

Ionosfäärissä etenemiseen vaikuttavat eniten vapaat elektronit. Hyvässä approksimaatiossa viive on kääntäen verrannollinen taajuuden f neliöön.

$$d_{\text{ion}} = 40,3 \text{ m}^3 \text{ Hz}^2 \cdot \frac{1}{f^2} \int N_e \, ds, \quad (8.12)$$

jossa N_e on vapaiden elektronien tiheys yksikössä elektroneja per kuutiometri, suure joka integroidaan sädepolkua pitkin. Ilmaisua

$$\text{TEC} \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-16} \text{ TECU m}^2 \cdot \int N_e \, ds \quad (8.13)$$

kutsutaan *elektronien kokonaispitoisuudeksi*, yksiköissä **TECU** eli 10^{16} elektronia per neliömetri. Silloin yhtälöstä 8.12 tulee

$$d_{\text{ion}} = 40,3 \cdot 10^{16} \text{ m Hz}^2 / \text{TECU} \cdot \frac{1}{f^2} \text{ TEC},$$

jossa taajuus f on annettava hertseinä. Siis metreissä

$$d_{\text{ion},1} = 0,1624 \text{ m/TECU} \cdot \text{TEC},$$

$$d_{\text{ion},2} = 0,2674 \text{ m/TECU} \cdot \text{TEC},$$

$$d_{\text{ion},5} = 0,2912 \text{ m/TECU} \cdot \text{TEC}$$

GPS-järjestelmän taajuuksilla.

Ionosfääri on *dispersiivinen*: etenemisviive riippuu taajuudesta f ja on siten erilainen modulaatioille — niin sanottu ryhmäviive — ja kantoaallolle. Itse asiassa kantoaallon vaiheella on negatiivinen viive³:

$$D_{\text{ion}} = -d_{\text{ion}}.$$

³Siis kantoaallon aaltorintamat lentävät nopeammin kuin valo tyhjiössä! Tämä ei ole ongelma, koska ne eivät ole aineellisia esineitä, vaan muistuttavat enemmän saksien "leikkaavaa pistettä", joka voi liikkua myös nopeammin kuin itse terät ([Wikipedia](#), [Superluminal motion](#)).

Ionosfäärin etenemisviiveen dispersiivisyys mahdollistaa viiveen eliminoimisen — tai määrittämisen — kaksois- tai monitaajuisien GNSS-vastaanottimien avulla. Tämä tulee ottaa huomioon havaintoyhtälöitä muodostettaessa: esimerkiksi yhtälöstä 8.1 tulee kaksitaajuisen vastaanottimen tapauksessa

$$p_1 = \rho + c (\Delta T - \Delta t) + d_{\text{ion},1} + d_{\text{trop}},$$

$$p_2 = \rho + c (\Delta T - \Delta t) + \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 d_{\text{ion},1} + d_{\text{trop}}.$$

Tästä yhteinen tuntematon $d_{\text{ion},1}$ voidaan joko ratkaista tai poistaa. Määritellään ionosfäärivapaa havaintosuure

$$p_{\text{ion}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_1^2 p_1 - f_2^2 p_2}{f_1^2 - f_2^2} = \rho + c (\Delta T - \Delta t) + d_{\text{trop}},$$

josta $d_{\text{ion},1}$ on poistettu.

8.3.2 Troposfääri

Troposfääri ei ole dispersiivinen, eli etenemisviive on riippumaton taajuudesta. Se voidaan ilmaista ilman taitekertoimeen:

$$d_{\text{trop}} = D_{\text{trop}} = \int (n - 1) ds = 10^{-6} \int N ds. \quad (8.14)$$

Taitekertoimen n tilalla käytetään usein kätevää suuretta $N \stackrel{\text{def}}{=} 10^6 (n - 1)$. Taitekerroin riippuu lämpötilasta T , paineesta p ja absoluuttisesta kosteudesta eli vesihöyryn osapaineesta e (Rüeger, 2002):

$$N = \frac{77,624 \text{ K/hPa}}{T} (p - e) + \frac{64,70 \text{ K/hPa}}{T} \left(1 + \frac{5748 \text{ K}}{T}\right) e.$$

Jos nämä kolme arvoa on saatavissa polkua pitkin, etenemisviive saadaan yllä olevasta polkuintegraalista 8.14. Vakiomallit, kuten Hopfieldin ja Saastamoisen, ovat yksinkertaistettuja approksimaatioita ja niihin syötetään pintamittausarvoja.

Troposfäärin erityispiirre on *vesihöyryn* suhteeton vaikutus etenemisviiveeseen: tietyllä vesihöyryn osapaineella on noin 18 kertaa muiden ilmakehän "kuivien" kaasujen vaikutus. Tämä liittyy vesimolekyylin poolisuuteen, jonka takia se vuorovaikuttaa vahvemmin mikroaaltojen kanssa — kuten myös mikroaaltouunissa.



8.3.3 Kuvausfunktio

Signaalin polku ilmakehän läpi on sitä pidempi, mitä lähempänä horisonttia GNSS-satelliitti on paikallisella taivaalla. Tällä seikalla ei ole merkitystä, kun etenemisviivettä mallinnetaan *ilmakehän* ominaisuutena. Siksi parametri d , joka edustaa viistosti ilmakehän läpi kulkevan säteen etenemisviivettä, korvataan tuntemattomana eli tilavektorin alkiona vastaavalla viiveellä samassa paikassa pystysuoraa polkua pitkin:

$$d = \mu(\zeta) d^\perp.$$

Tässä d^\perp on *zeniitin kokonaisviive* ja $\mu(\zeta)$ niin sanottu *kuvausfunktio*.

Litteän Maan kuvausfunktio on $\mu(\zeta) = 1/\cos \zeta$, jossa ζ on satelliitin zeniittikulma paikallisella taivaalla. Todelliselle kaarevalle maapallolle on olemassa tarkempia kuvausfunktioita, joissa otetaan huomioon Maan kaarevuuden vuorovaikutus taiteaineen pystyjakauman kanssa.

Nämä uudet ilmakehän viiveparametrit d^\perp voidaan lisätä yhtälöön 8.2, josta tulee

$$p = \rho + c(\Delta T - \Delta t) + \mu_{\text{ion}} d_{\text{ion}}^\perp + \mu_{\text{trop}} d_{\text{trop}}^\perp. \quad (8.15)$$

Uusien parametrien estimointi antaa uudeksi tilavektoriksi \mathbf{x} ja havaintomatriisiksi \mathbf{H} , kun estimoidaan vastaanottimen sijainnit, yhtälöt 8.9 ja 8.8:

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} & \Delta T & d_{\text{ion}}^\perp & d_{\text{trop}}^\perp \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}}{\rho} & c & \mu_{\text{ion}} & \mu_{\text{trop}} \end{bmatrix}^{(0)}.$$



8.3.4 Useita satelliitteja

Jos näkyvissä on useita satelliitteja eri korkeuskulmilla, tästä tulee

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(1)}}{\rho^{(1)}} & c & \mu_{\text{ion}}^{(1)} & \mu_{\text{trop}}^{(1)} \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(2)}}{\rho^{(2)}} & c & \mu_{\text{ion}}^{(2)} & \mu_{\text{trop}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(n)}}{\rho^{(n)}} & c & \mu_{\text{ion}}^{(n)} & \mu_{\text{trop}}^{(n)} \end{bmatrix}^{(0)},$$

jossa $\mu^S \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\zeta^S)$ satelliitille S , eri arvot eri satelliiteille. Tästä Kalmanin suodin voi periaatteessa ratkaista tuntemattomat d^\perp , jotka ovat yhteisiä kaikille satelliiteille.



Jos antureita on useita, havaintoyhtälötkin on muodostettava kaikille. Jos esimerkiksi GNSS-vastaanotin pystyy mittaamaan useilla taajuuksilla, voidaan ionosfäärin etenemisviive määrittää tarkasti ja eliminoida. Kaksitaajuusvastaanottimelle ja useille satelliiteille tulos on

$$\begin{aligned} p_{\text{ion}}^{(1)} &= \rho^{(1)} + c (\Delta T - \Delta t^{(1)}) + \mu_{\text{trop}}^{(1)} d_{\text{trop}}^{\perp}, \\ p_{\text{ion}}^{(2)} &= \rho^{(2)} + c (\Delta T - \Delta t^{(2)}) + \mu_{\text{trop}}^{(2)} d_{\text{trop}}^{\perp}, \\ &\dots \\ p_{\text{ion}}^{(n)} &= \rho^{(n)} + c (\Delta T - \Delta t^{(n)}) + \mu_{\text{trop}}^{(n)} d_{\text{trop}}^{\perp}, \end{aligned}$$

ja tilavektori \mathbf{x} ja H -matriisi ovat

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta T \\ d_{\text{trop}}^{\perp} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(1)}}{\rho^{(1)}} & c & \mu_{\text{trop}}^{(1)} \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(2)}}{\rho^{(2)}} & c & \mu_{\text{trop}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(n)}}{\rho^{(n)}} & c & \mu_{\text{trop}}^{(n)} \end{bmatrix}^{(0)}.$$

Tässä on jäljellä vain yksi ilmakehän tuntematon, d_{trop}^{\perp} . Koska $\zeta^{(i)} \neq \zeta^{(j)} \Rightarrow \mu_{\text{trop}}^{(i)} \neq \mu_{\text{trop}}^{(j)}$, sen pitäisi olla estimoitavissa, jos on riittävästi satelliitteja eri korkeuskulmilla.

Tässä oletetaan, että tuntematon d_{trop}^{\perp} on sama kaikille satelliiteille ja yhtä kuin zeniittisuuntainen integraali suoraan vastaanottimen yläpuolella. Tämä pätee täydellisesti kerrostuneen ilmakehän tapauksessa, muttei ole tietenkään tarkasti totta todellisessa ilmakehässä, jossa taiteaineen määrä ei ole vakio vaakasuunnassa.

Ratkaisuna tähän voidaan kehittää d^{\perp} Taylorin sarjaan:

$$d^{\perp} = d_0^{\perp} + \tan \zeta \cos \alpha d_{\text{pohj}}^{\perp} + \tan \zeta \sin \alpha d_{\text{itä}}^{\perp} + \dots,$$

jossa ζ on satelliitin zeniittikulma ja α sen atsimuutti. Yhden estimoitavan tuntemattoman sijasta niitä onkin kolme: d_0^{\perp} , d_{pohj}^{\perp} ja $d_{\text{itä}}^{\perp}$, ja ne kaikki voidaan estimoida yhdellä vastaanottimella ja yhdellä epookilla, jos näkyviä satelliitteja on riittävästi. Tilavektorista tulee

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} & \Delta T & d_{\text{trop},0}^{\perp} & d_{\text{trop,pohj}}^{\perp} & d_{\text{trop,itä}}^{\perp} \end{bmatrix}^T$$

ja havaintomatriisista



$$H = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(1)}}{\rho^{(1)}} & c & \mu_{\text{trop}}^{(1)} & \tan \zeta^{(1)} \cos \alpha^{(1)} \mu_{\text{trop}}^{(1)} & \tan \zeta^{(1)} \sin \alpha^{(1)} \mu_{\text{trop}}^{(1)} \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(2)}}{\rho^{(2)}} & c & \mu_{\text{trop}}^{(2)} & \tan \zeta^{(2)} \cos \alpha^{(2)} \mu_{\text{trop}}^{(2)} & \tan \zeta^{(2)} \sin \alpha^{(2)} \mu_{\text{trop}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^{(n)}}{\rho^{(n)}} & c & \mu_{\text{trop}}^{(n)} & \tan \zeta^{(n)} \cos \alpha^{(n)} \mu_{\text{trop}}^{(n)} & \tan \zeta^{(n)} \sin \alpha^{(n)} \mu_{\text{trop}}^{(n)} \end{bmatrix}^{(0)}.$$

Tätä lähestymistapaa on käytetty troposfäärin viiveen mallintamisessa.

8.3.5 Vertausmallien käyttö

Merkittävä parannus saadaan aikaan käyttämällä *residuaalisia* ionosfäärin tai troposfäärin korjauksia suhteessa tiettyyn *a priori* malliin. Merkintätapa on silloin

$$\mu_{\text{ion}} \Delta d_{\text{ion}}^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{d}_{\text{ion}} - \underline{d}_{\text{ion}}^{(0)}, \quad \mu_{\text{trop}} \Delta d_{\text{trop}}^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{d}_{\text{trop}} - \underline{d}_{\text{trop}}^{(0)},$$

jossa $\underline{d}_{\text{ion}}^{(0)}$ ja $\underline{d}_{\text{trop}}^{(0)}$ ovat mallien antamia arvoja.

Ionosfäärin tapauksessa *a priori* malli voisi olla Klobucharin malli, joka sisältyy satelliitin lähettämään navigointiviestiin ja on hyvin yksinkertainen. Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät (**SBAS**) lähettävät ionosfäärimalleja, jotka pätevät peittoalueillaan, katso luku 10. Niin tekevät myös **RTK**-tukiasemaverkot, jotka käyttävät **MAC**/**MAX**-protokollia, osio 9.4.

Troposfäärille tarjoutuvat ratkaisuksi tunnetut Hopfieldin tai Saastamoisen mallit. Niihin syötetään ilmatieteellisten parametrien arvot, kuten lämpötila, ilmanpaine ja kosteus mittauspaikalla. Voidaan käyttää mittauspaikan mitattuja arvoja, jos niitä on saatavilla, tai vaihtoehtoisesti interpoloituja arvoja läheisiltä maa-asemilta. Silloin on otettava asianmukaisesti huomioon monien parametrien pystysuuntaiset gradientit. Ja viimeisenä keinona voidaan käyttää mittauspaikan ilmastollisia keskiarvoja.

Silloin yhtälöstä 8.15 tulee

$$p = \rho + c (\Delta T - \Delta t) + \underline{d}_{\text{ion}}^{(0)} + \underline{d}_{\text{trop}}^{(0)} + \mu_{\text{ion}} \Delta d_{\text{ion}}^{\perp} + \mu_{\text{trop}} \Delta d_{\text{trop}}^{\perp}. \quad (8.16)$$

Usein on suositeltavaa jakaa troposfäärin etenemisviive ”kuivaan” ja ”kosteaan” osaan, koska niillä on erilaiset kuvausfunktiot $\Delta d_{\text{kuiva}}^{\perp}$ ja $\Delta d_{\text{kostea}}^{\perp}$. Tämä pätee erityisesti, jos käytössä on ilmanpaineanturi, kuten lentokoneissa. Ilmanpaine antaa tietoja lähinnä etenemisviiveen kuivasta — hydrostaattisesta — osasta.



8.4 Eri estimointitehtävien dynaamiset mallit



8.4.1 Satelliittiradan määrittäminen

Erikoistetaan yhtälö 8.16 seuraavaksi havaintoyhtälöksi:

$$\underline{p} = \underline{\rho} + c(\Delta T - \underline{\Delta t}) + \underline{d}_{\text{ion}}^{(0)} + \underline{d}_{\text{trop}}^{(0)} + \mu_{\text{ion}} \Delta \underline{d}_{\text{ion}}^{\perp} + \mu_{\text{trop}} \Delta \underline{d}_{\text{trop}}^{\perp} + \underline{m},$$

$$\underline{\rho} = \sqrt{(\underline{x} - X)^2 + (\underline{y} - Y)^2 + (\underline{z} - Z)^2}.$$

Tässä \underline{m} edustaa havainnon kohinaa eli satunnaista virhettä.

Tämä on *radanmäärittäminen* havaintoyhtälö. Siinä maa-aseman eli seuranta-aseman paikka on annettu ei-stokastisena: $\mathbf{X} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$.

Tarkassa radanmäärittäksessä näitä koordinaatteja ei saa pitää vakiona. On selvää, että inertiaalisessa vertauskehyksessä maapallon pyörähdysliike on mallinnettava. Mukaan on otettava myös Maan suuntausparametrit (EOP), kuten napaliike ja vuorokauden pituuden vaihtelut. Aikasarjat saadaan Internetistä. Myös aseman yksittäiset liikkeet on otettava huomioon, esimerkiksi laattatektoniikan tai jääkauden jälkeisen isostaattisen sopeutumisen (GIA) takia.

Satelliitin paikka $\underline{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ on stokastinen ja se estimoidaan suotimen avulla.

Seuranta-aseman kellossa noudatetaan GNSS-järjestelmän aikaa, jolloin poikkeama on ΔT . Satelliitin kellopoikkeama $\underline{\Delta t}$ estimoidaan.

Tähän tilanteeseen tunnistamme *tilavektoriksi*

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x} & \underline{v} & \underline{\Delta t} & \Delta \underline{d}_{\text{ion}}^{\perp} & \Delta \underline{d}_{\text{trop}}^{\perp} \end{bmatrix}^T.$$

Tavan mukaan tilavektoriin lisättiin nopeusvektori \underline{v} , jotta Kalmanin suotimen dynaamiset yhtälöt voidaan kirjoittaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiksi.

Seuraavaksi päätetään, millä tavalla jokaisen tilavektorin alkion käyttäytyminen ajassa mallinnetaan. Sijainnin \underline{x} tapauksessa tämä päätös on yksinkertainen: määritelmän mukaan

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{v}$$

tarkasti. Satelliitin nopeudelle käytetään keskeisvoimakentän yhtälöä *linearisoituna*. Likiarvoiksi kelpaavat olemassa olevat rataennusteet. Navigoinnissa ainostaan satelliittien tosiajassa lähettämät ("broadcast ephemeris") kelpaavat.



Olkoot likiarvot $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)}, \Delta t^{(0)}$. GNSS-järjestelmän rataennusteissa ovat aina mukana myös satelliittien kellopoikkeamat. Sen jälkeen linearisoidut eli differentiaaliset tilavektorin alkioit ovat

$$\Delta \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(0)}, \quad \Delta \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^{(0)}, \quad \Delta(\Delta t) = \Delta t - \Delta t^{(0)}.$$

Nyt linearisoidut suodinyhtälöt suureille $\underline{\mathbf{x}}$ ja $\underline{\mathbf{v}}$ ovat

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \Delta \underline{\mathbf{x}} \\ \Delta \underline{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathcal{M}^{(0)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \Delta \underline{\mathbf{x}} \\ \Delta \underline{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\mathbf{n}}_a \end{bmatrix},$$

jossa $\mathcal{M}^{(0)}$ on *gravitaatiogradienttitensori*, joka johdettiin aiemmin keskeisvoimakentälle, katso yhtälö 3.9. \mathbf{I} on yksikkömatriisi, jonka koko on 3×3 , ja $\underline{\mathbf{n}}_a$ on satelliittiliikkeen dynaaminen kohina.

Miten mallinnetaan satelliitin kellon käyttäytyminen Δt ? Usein valitaan *satunnaiskulun* prosessimalli, yhtälö 2.22, katso osio 7.8:

$$\frac{d}{dt} \Delta(\Delta t) = \underline{\mathbf{n}}_t.$$

Troposfäärin ja ionosfäärin etenemisviiveitä edustavat zeniittiviiveet $\Delta d_{\text{ion}}^\perp$ ja $\Delta d_{\text{trop}}^\perp$, joista on poistettu polun viiston suunnan vaikutus ilmakehässä eli GNSS-satelliitin zeniittikulma paikallisella taivaalla. Zeniittiviiveistä on vähennetty myös vertausmalli.

Tässä tapauksessa käytetään usein Gaussin ja Markovin mallia ja valitaan järkevä aikaparametri τ . Parametri tulisi valita edustamaan ilmakehän muutoksen aikaskaalaa: muutamaa tuntia. Suositeltavaa on jakaa troposfäärin etenemisviive ”kuivaan” ja ”kostean” osaan sekä muodostaa niihin erillisiä dynaamisia malleja.

Yhteenveto Kalmanin suotimen dynaamisen mallin muodossa on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \Delta \underline{\mathbf{x}} \\ \Delta \underline{\mathbf{v}} \\ \Delta(\Delta t) \\ \Delta d_{\text{ion}}^\perp \\ \Delta d_{\text{trop}}^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & & & & \\ \mathcal{M}^{(0)} & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & -\frac{1}{\tau_{\text{ion}}} & & \\ & & & & -\frac{1}{\tau_{\text{trop}}} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \Delta \underline{\mathbf{x}} \\ \Delta \underline{\mathbf{v}} \\ \Delta(\Delta t) \\ \Delta d_{\text{ion}}^\perp \\ \Delta d_{\text{trop}}^\perp \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\mathbf{n}}_a \\ \underline{\mathbf{n}}_t \\ \underline{\mathbf{n}}_{\text{ion}} \\ \underline{\mathbf{n}}_{\text{trop}} \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että tilavektorin alkioiden $\Delta d_{\text{ion}}^\perp$ tai $\Delta d_{\text{trop}}^\perp$, tai jopa $\Delta d_{\text{kuiva}}^\perp$ ja $\Delta d_{\text{kosteaa}}^\perp$, sisällyttäminen tilavektoriin ei takaa, että prosessit tuottavat



hyviä estimaatteja! Kaikki riippuu käytettävissä olevista havainnoista. Esimerkiksi kaksitaajuisen GNSS-vastaanottimen käyttö mahdollistaa suureen $\Delta \underline{d}_{\text{ion}}^{\perp}$ eliminoinnin. Ja jos saatavilla on suureen $\Delta \underline{d}_{\text{trop}}^{\perp}$ riippumattomia tosiaikaisia estimaatteja, esimerkiksi alueella toimivasta GNSS-seurantaverkosta, niitä voidaan käyttää suureen eli alkion eliminomiseksi tilavektorista.

Jos tilanne ei ole kuvatulainen, tilavektorin alkion estimaatti lähenee nollaa, sen epävarmuus jää suureksi ja se korreloi vahvasti tilavektorin muiden samalla tavalla epävarmojen alkiodien kanssa. Tämä on numeerisesti epämiellyttävä tilanne.



8.4.2 Maa-aseman paikan määrittäminen

Lähtien samasta yhtälöstä 8.16 muodostetaan eri havaintoyhtälö:

$$\underline{p} = \underline{p} + c(\Delta T - \Delta t) + \underline{d}_{\text{ion}}^{(0)} + \underline{d}_{\text{trop}}^{(0)} + \mu_{\text{ion}} \Delta \underline{d}_{\text{ion}}^{\perp} + \mu_{\text{trop}} \Delta \underline{d}_{\text{trop}}^{\perp} + \underline{m},$$

$$\underline{p} = \sqrt{(\underline{x} - \underline{X})^2 + (\underline{y} - \underline{Y})^2 + (\underline{z} - \underline{Z})^2}.$$

Tämä on *geodeettisen paikannuksen* havaintoyhtälö. Tässä satelliitin rata-alkiot ja kellopoikkeama oletetaan tunnetuiksi: $\underline{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja Δt voidaan laskea tarkasti käytettävissä olevista ratatiedoista. Nyt *tilavektori* on

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{X} & \underline{V} & \Delta T & \Delta \underline{d}_{\text{ion}}^{\perp} & \Delta \underline{d}_{\text{trop}}^{\perp} \end{bmatrix}^T,$$

jossa \underline{V} on aseman liikkeen nopeusvektori. Uutena ongelmana on maa-aseman vektoreiden $\underline{X}(t)$, $\underline{V}(t)$ käyttäytymisen mallinnus.

Mikäli maa-aseman paikka on vakio, voidaan malliksi valita Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa

$$\underline{V} = \frac{d}{dt} \underline{X} = 0.$$

Jos tiedetään, että maa-asemat liikkuvat, mutta hitaasti ja vakionopeudella esimerkiksi laattatektoniikan tai jääkauden jälkeisen isostaattisen sopeutumisliikkeen takia, voidaan kirjoittaa

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{X} \\ \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{F} \\ 0 & \text{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{X} \\ \underline{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kalmanin suodin parantaa hitaasti mutta varmasti suureiden estimaattorit $\hat{\underline{X}}$, $\hat{\underline{V}}$ ajan edetessä, kun lisää havaintoja \underline{p} käsitellään.



Jotkut olemassa olevat GNSS:n laskentaohjelmistot (GYPSY/OASIS) käyttävät Kalmanin suodinta juuri tällä tavalla.

Samoja yhtälöitä voi käyttää myös *liikkuvalle kulkuneuvolle*, esimerkiksi lentokoneelle, mutta se on mutkikkaampaa. Hyväksi voidaan käyttää tietoa, että kulkuneuvon kiihtyvyys on rajallinen, ja mallintaa se värillisenä kohinana, esimerkiksi Gaussin ja Markovin prosessina. Yhtälön 2.28 mukaan tällaisen prosessin varianssi on $Q_n/2k$, kun prosessiyhtälö on

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{A}} = -k\underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{n}}_A.$$

Olkoon $\tau_A = 1/k$ liikkeen aikavakio. Tyypillisesti on kyse sekunneista, koska se on kulkuneuvon liikkeiden aikaskaala. Lisäksi olkoon α tyypillisesti esiintyvien kiihtyvyyksien suuruusluokka. Kirjoittamalla

$$\frac{Q_n}{2k} = \frac{1}{2}Q_n\tau_A = \alpha$$

saadaan pakotekohinan $\underline{\mathbf{n}}_A$ varianssiksi

$$\text{Var}\{\|\underline{\mathbf{n}}_A\|\} = E\{\langle \underline{\mathbf{n}}_A \cdot \underline{\mathbf{n}}_A \rangle\} = Q_n = \frac{2\alpha}{\tau_A}.$$

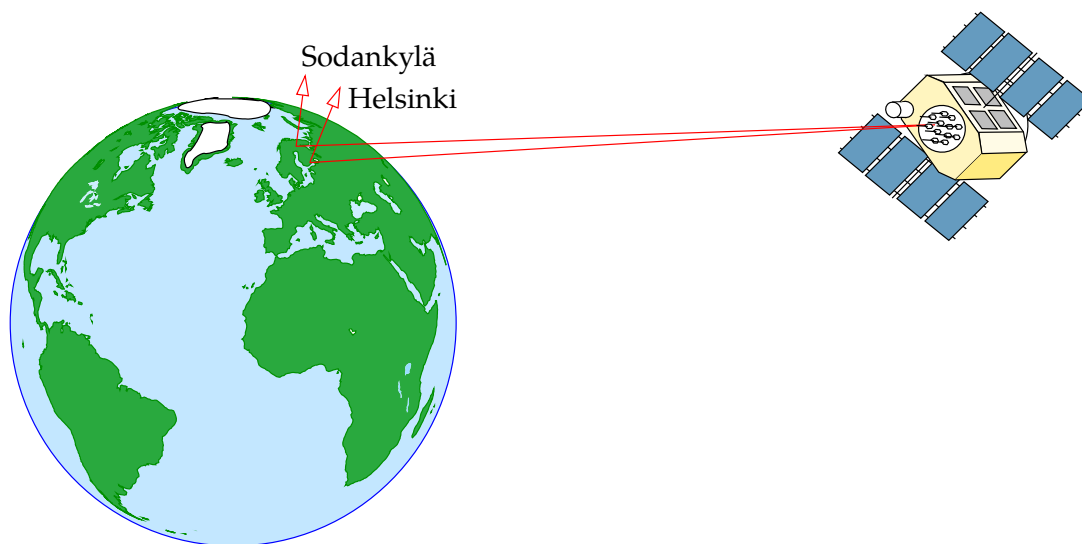
Näin saadaan täydelliseksi dynaamiseksi malliksi, johon on lisätty myös ΔT , $\Delta d_{\text{ion}}^\perp$ ja $\Delta d_{\text{trop}}^\perp$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{V}} \\ \underline{\mathbf{A}} \\ \Delta T \\ \Delta d_{\text{ion}}^\perp \\ \Delta d_{\text{trop}}^\perp \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & & & & & \\ & 0 & I & & & & \\ & & -\frac{1}{\tau_A}I & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & -\frac{1}{\tau_{\text{ion}}} & & \\ & & & & & -\frac{1}{\tau_{\text{trop}}} & \end{bmatrix}}^F \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{V}} \\ \underline{\mathbf{A}} \\ \Delta T \\ \Delta d_{\text{ion}}^\perp \\ \Delta d_{\text{trop}}^\perp \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\alpha}{\tau_A}\underline{\mathbf{n}}_1 \\ \underline{\mathbf{n}}_t \\ \underline{\mathbf{n}}_{\text{ion}} \\ \underline{\mathbf{n}}_{\text{trop}} \end{bmatrix}, \quad (8.17)$$

jossa $\underline{\mathbf{X}}$ ja $\underline{\mathbf{V}}$ ei ole linearisoitu. Jos tilavektorin päivittämiseen halutaan käyttää havaintoina pseudoetäisyyksiä, epälineaarinen havaintoyhtälö on linearisoitava, mikä tuottaa linearisoidut $\Delta \underline{\mathbf{X}}$ ja $\Delta \underline{\mathbf{V}}$. Niitä tulee käyttää myös dynaamisessa mallissa 8.17. Jätämme tämän lukijan harjoitustehtäväksi.

Kohinavektori $\underline{\mathbf{n}}_1$ on "yksikkövariانسsin valkoinen kohina", tässä tapauksessa kolmiulotteinen vektori.

Sekä α että τ_A riippuvat kulkuneuvon tyypistä. Ympäristöä, jossa α on suuri ja τ_A lyhyt kutsutaan usein "high dynamic" eli korkean dynamiikan



KUVA 8.1. Differentiaalipaikannus. Kahden maa-aseman, tässä Helsingin ja Sodankylän, välinen etäisyys on aina *pieni* satelliittiradan korkeuteen, 20 000 km, verrattuna. Siksi differentiaalimittausten ratavirhe kumoutuu enemmiltä osin. Satelliitin kellovirhe kumoutuu kokonaan.



ympäristöksi. Ympäristö on haastava GNSS-vastaanottimien suunnittelun kannalta, koska vastaanotetun signaalin taajuuden dopplersiirtymät ovat voimakkaita, nopeita ja ennakoimattomia.



8.5 Differentiaalipaikannus

Koodimittauksen ja kantoaallon vaiheen mittauksen yhteinen ongelma on satelliittien rataennusteiden epätarkkuus. Tosiajassa satelliittien lähettämät rataennusteet eli *broadcast ephemeris* antaa noin ± 1 m tarkkuuden satelliitin kolmiulotteisessa paikassa⁴.

Ratkaisun tarjoaa differentiaalitekniikka eli tukiaseman tai tukiasemien verkon käyttö. Jos etäisyys tukiasemalta on riittävän pieni, suurin osa lopputuloksen ratavirheestä kumoutuu, katso kuva 8.1.

Differentiaalipaikannuksen tarkkuutta voidaan arvioida helposti geometrisen tarkastelun avulla. Katso kuva 8.2. Jos satelliittiradan geometrista tarkkuutta kutsutaan Δ ja satelliitin etäisyyttä havaitsijasta

⁴Kansainvälinen GNSS-palvelu IGS kuitenkin julkaisee ”erittäin nopeita” rataennusteita eli *ultra-rapid orbits* neljä kertaa vuorokaudessa, jolloin ennusteiden arvioitu tarkkuus on ± 5 cm. Ennusteet ovat saatavilla tosiajassa (International GNSS Service). Tämä arvo on arvioitu yksittäisten koordinaattien keskivirhe eli σ_x , σ_y ja σ_z .

Kinemaattisen mittausmenetelmän keksi amerikkalainen Benjamin Remondi. Menetelmä käyttää havaintosuurena GNSS-satelliitin lähettämän radiosignaalin kantoaallon vaihekulmaa. Tämä havaintosuure kärsii ambiguuteettien eli moniselitteisyyksien eli kokonaistuntemattomien ongelmasta: vaihekulma on jaksollinen jaksolla 2π . Mitatun vaihekulman oletetaan olevan mittauksen alussa yhden täyden kierroksen, $[0, 2\pi)$, sisällä. Sen jälkeen kun etäisyys muuttuu, mitattu vaihekulma seuraa näitä muutoksia. Todellinen etäisyys kuitenkin eroaa vaihekulmasta pääteltävissä olevasta etäisyydestä kokonaislukumäärän verran täysiä vaihekierroksia eli aallonpituuksia. Kokonaislukua ei voida määrittää ainoastaan vaihemittauksen avulla.

RTK-mittauksen aikana vastaanotin pysyy ”lukittuna” GNSS-kantoaallon vaiheeseen. Niin kauan kuin lukitus säilyy eikä tapahdu vaihekatkoa (*”cycle slip”*), kantoaallon vaihemittaukseen kuuluva tuntematon kokonaisluku ei muutu.

Oleta nyt, että nämä kokonaisluvut saadaan jollain tavalla määritettyä, esimerkiksi käymällä sijainniltaan tunnetulla pisteellä, jonka etäisyys satelliiteista voidaan laskea. Ratkaisemisen jälkeen vastaanottimen jatkuvasti seuraamat vaihekulma-arvot edustavat nyt oikeita etäisyyksiä satelliiteista.

Sen jälkeen voidaan siirtää vastaanotin — tästä tulee sana ”kinemaattinen” — toisille pisteille, joiden tuntemattomat sijainnit ratkaistaan tosiajassa, vaikkakin vain tunnetun lähtöpisteen suhteen.

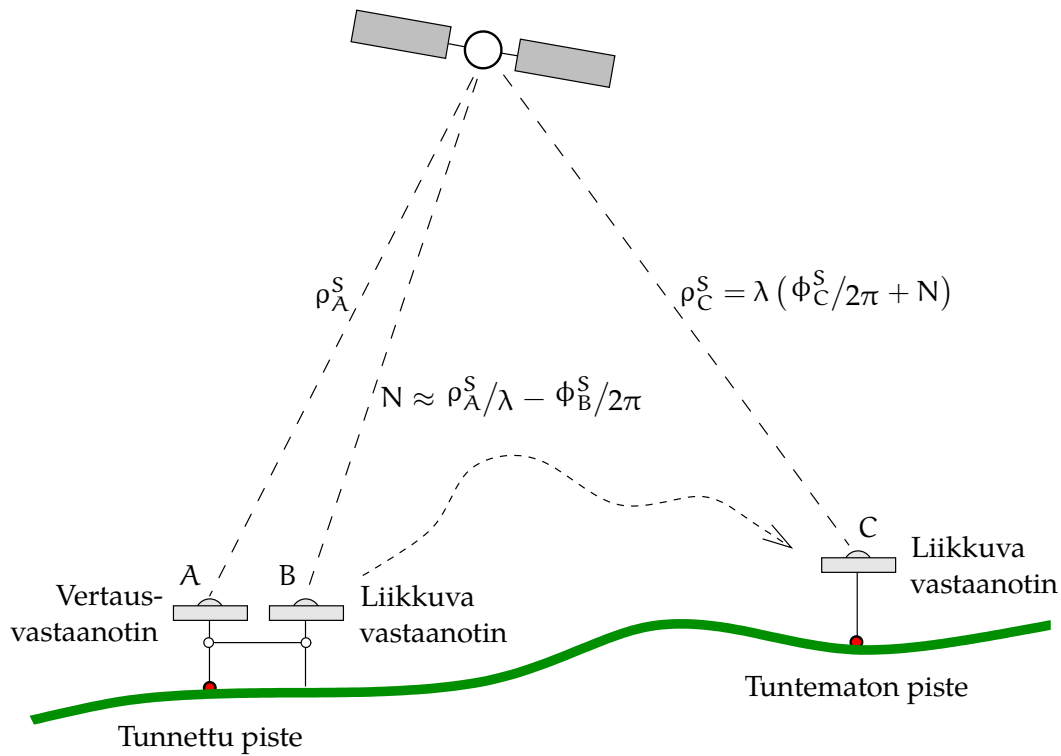
Katso kuva 8.3.

Tässä esitetty menettely ei vielä sisällä kuvan 8.3 liikkumatonta vertausvastaanotinta. Vertausvastaanotinta ei tarvittaisi, jos virhelähteet, jotka vaikuttavat satelliitin etäisyyden mittaukseen tunnetusta pisteestä, voitaisiin olettaa ajassa muuttumattomiksi. Todellisuudessa ne tietenkin muuttuvat.

Ensisijainen virhelähde on vastaanottimen kellon poikkeama ja etenkin sen *käynti*. Siksi havaintosuureita kutsutaan ”pseudoetäisyyksiksi” eikä etäisyyksiksi. Myöhemmin tulevassa alaosiossa 9.1.2 nähdään, miten tämä virhe voidaan poistaa muodostamalla erotushavaintosuureita.

Tämän lisäksi on olemassa satelliittien kellopoikkeamia ja etenemisviiveitä pitkin muuttuvaa signaalin polkua ilmakehässä. Vertausvastaanotin yrittää seurata näiden satelliittien ja ilmakehän aiheuttamien virheiden ajallisia muutoksia, jotta liikkuva vastaanotin voi korjata ne. Tietenkin tämä toimii vain vertausvastaanottimen lähellä, jossa





KUVA 8.3. Tosi aikaisen kinemaattisen **GNSS**-paikannuksen idea. Ko-lokaation avulla voidaan määrittää kokonaistuntematon N , mikä mahdollistaa satelliitin todellisen etäisyyden määrittämisen tuntemattomalla paikalla C . Oletettu on, epärealistisesti, että kaikki mitatun kantoaal- lon vaiheen ϕ muutokset ovat satelliitin ja vastaanottimen välisen geometrisen etäisyyden ρ muutosten aiheuttamia.

se "näkee" saman satelliittien ja ilmakehän geometrian kuin liikkuva vastaanotin.

Tosi aikaisiin mittauksiin tarvitaan *tietoyhteys* vertausvastaanottimelta liikkuvalla vastaanottimelle.



8.7 Tietoyhteys

Tosi aikaisissa differentiaalimenetelmissä *radioyhteyttä* käytetään joko alkuperäisten havaintojen tai differentiaalikorjausten välittämiseksi "tukiasemalta", jonka sijainti tunnetaan, toiselle usein liikkuvalla vastaanottimelle tuntemattomassa paikassa. Eri menetelmät

- välittävät joko kantoaallon vaihetta tai kantoaaltoon moduloitua **PRN**- eli näennäissatunnaiskoodin saapumisajan poikkeamaa
- voivat käyttää yhtä vertausasemaa kokonaiselle alueelle tai useita asemia interpoloinnin avulla

- o voivat interpoloida erikseen jokaiselle käyttäjälle, joiden on siten ilmoitettava sijaintinsa, jolloin puhutaan *täsmälähetyksestä*. Toinen vaihtoehto on antaa käyttäjien interpoloida itse, jolloin kyseessä on *yleislähetys*. Välimuoto on *ryhmälähetys*, jossa eri viestit lähetetään eri käyttäjäryhmille.

Tietolinkkinä voi toimia radiolähetysverkko, pari radiomodeemia, matkapuhelinverkko tai jopa geostationaarinen satelliitti. Peittävyys voi olla paikallinen (radiomodeemit), kansallinen (Suomessa kaupalliset palvelut Trimnet VRS⁵ ja HxGN SmartNet⁶), mannerlaajuinen (satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät) tai globaali (GDGPS, Jet Propulsion Laboratory).



8.8 RTCM-standardi

Radio Technical Commission for Maritime Services (RTCM, <http://www.rtcn.org/>) on vuonna 1947 perustettu riippumaton järjestö. Jäsenjärjestöjä on yli sata, ja joukossa on radionavigointilaitteiden valmistajia, valtiollisia elimiä, joilla on vastuu radiopaikannuksesta, laivanvarustajia, paikannuspalveluiden tarjoajia ja akateemisia laitoksia.

RTCM Special Commission 104 on laatinut GPS-differentiaalitietopalvelun standardin, joka kantaa nimeä RTCM SC-104 eli RTCM-104 eli "RTCM". Laajassa käytössä oleva versio on RTCM 10402.3 eli 2.3.

Viestityyppejä on lueteltu taulussa 8.1. Jokainen viesti on 30 bitin jono.

Uusin versio on RTCM 10403.2 eli 3.2, joka ei kuitenkaan ole yhteensopiva aikaisempien versioiden 2.x kanssa. Se käyttää tehokkaampaa datansiirtomekanismia kuin 2.x-protokolla. Kuten versiot 2.x, sekin soveltuu tosiaikaiseen kinemaattiseen mittaukseen.

Standardin tärkeä uusi kehitys on MSM, Multiple Signal Messages, joka mahdollistaa kaikkiin GNSS- ja SBAS-järjestelmiin liittyvien tietojen esittämisen ja levittämisen tosiaikaisesti yhtenäisessä muodossa. Se hyödyntää parhaiten useiden järjestelmien rinnakkaisoloa.

Saksalainen tutkimuslaitos BKG on laatinut 3-version viesteistä hyvän yhteenvedon, mukaan lukien MSM: BKG, RTCM-3 Message Types.

Markkinoilla on monia laitteistoja, jotka lähettävät ja osaavat käyttää

⁵VRS on Trimble Inc:n tavaramerkki.

⁶HxGN SmartNet on Leica Geosystems AG:n tavaramerkki.





TAULU 8.1. **RTCM** SC-104-formaatin viestityypit. Protokollaversio 2.3, kevyesti editoitu. Tähti merkitsee: poistunut käytöstä tai käyttö vähäistä.

Message type	Message title	Message type	Message title
1	DGPS corrections	20	RTK carrier-phase corrections
2	Delta DGPS corrections*	21	RTK pseudorange corrections
3	GNSS Reference station parameters	22	Extended reference station parameters*
4	Carrier surveying information	23	Antenna type definition record
5	GPS constellation health	24	Antenna reference point (ARP)
6	GPS null frame	25–26	Undefined
7	DGPS radiobeacon almanac*	27	Extended radiobeacon almanac
8	Pseudolite almanac*	31	Differential GLONASS corrections
9	High-rate DGPS corrections	32	GLONASS reference station parameters
10	P-code DGPS corrections*	33	GLONASS constellation health
11	C/A code L1/L2 delta corrections*	34	GLONASS differential corrections
12	Pseudolite station parameters*	35	GLONASS radiobeacon almanac
13	Ground transmitter parameters*	36	GLONASS special message
14	Surveying auxiliary message	37	GNSS system time offset
15	Ionospheric/tropospheric message	38–40	Undefined
16	GPS special message	41–43	Experimental (generic GNSS)
17	GPS ephemeris almanac	44–58	Undefined
18	Uncorrected carrier phases	59	Proprietary message
19	Uncorrected pseudoranges	60–63	Differential Loran C messages

mainittuja viestityyppejä differentiaalipaikannuksessa käyttäen joko **GPS**-signaalin kantoaallon vaihemittauksia (**RTK**-tekniikka) tai kantoaalloille moduloituja näennäissatunnaiskoodeja (**DGPS**-tekniikka). Molemmissa tapauksissa paikannus on *tosiaikaista*: saadun paikkaratkaisun ”ikä” jää aina annettua raja-arvoa lyhyemmäksi.

RTCM-viestit lähetetään *tukiaseman* puolesta. Tukiaseman sijainti on geodeettisen tarkasti määritetty staattisella **GNSS**-paikannuksella. Koska paikka on tiedossa, voidaan satelliittien lähettämien ratatietojen avulla



laskea, mikä pseudoetäisyyden *pitäisi* olla jokaiseen satelliittiin⁷. Mitatun pseudoetäisyyden vähennys tästä arvosta antaa *korjauksen*, joka koodataan viestiin (viestityypit 1, 20 ja 21)⁸.

Lähetetyt korjaukset pätevät tukiaseman kohdalla ja pienellä alueella sen ympärillä. Alueen koko riippuu halutusta tarkkuudesta. Tarkkuus on metrin luokkaa jopa satojen kilometrien päässä tukiasemalta, mutta senttimetrin luokkaa vain noin kymmeneen kilometriin saakka.



8.9 NTRIP-protokolla

NTRIP merkitsee "Networked Transport of **RTCM** via Internet Protocol". Se perustuu oivallukseen, että vaikka **RTCM**-protokollan mukaiset differentiaalikorjaukset voidaan siirtää kahden radiomodeemin avulla, Internet tarjoaa houkuttelevamman vaihtoehdon. Mobiilia tukiasemaverkkoa voidaan käyttää korjausten lähettämiseen kentällä toimiville **GNSS**-kojeille Internetin välityksellä. 3G-, 4G- ja 5G-teknologiasukupolvien datansiirtonopeudet ovat tähän tarkoitukseen enemmän kuin riittäviä.

Käytetty protokolla on luonteeltaan *suoratoistoa* ("streaming"), joka perustuu hypertekstin siirtoprotokollaan **HTTP** ("Hypertext Transfer Protocol"). Se on jo massiivisessa käytössä verkkosivujen välittämisessä Internetin kautta. Protokolla muokattiin sopivaksi **GNSS**-tietovirtojen siirtämiseen, ja se pystyy tarjoamaan useita tietovirtoja useille käyttäjille. Eri tietovirrat eli tietolähteet erotetaan toisistaan nimettyillä liityntäpisteillä ("mount points"). **NTRIP**-protokolla kehitetään aktiivisesti Saksan liittovaltion **BKG**-tutkimuslaitoksessa, joka ylläpitää avoimen lähdekoodin mallitoteutusta. Katso **BKG, NTRIP v. 1.0**.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on havaintoyhtälö koodin pseudoetäisyydsmittauksille?
- 2) Mikä on havaintoyhtälö kantoaallon vaiheen mittauksille?
- 3) Mikä on zenitiin etenemisviive? Mikä on kuvausfunktio?

⁷Tämä logiikka ei ota huomioon vastaanottimen kellopoikkeamaa. Sillä ei ole kuitenkaan merkitystä, jos tosiaikaan paikannukseen käytetään tavan mukaisesti kaksoiserotuksia, koska silloin kellopoikkeama kumoutuu.

⁸**RTK**-mittauksissa lähetetään usein mieluummin alkuperäiset vaihehavainnot, tyypit 18 ja 19, mutta käsitteellisesti kyse on samasta asiasta.

- 4) Kun määritetään maa-asemien koordinaatit GNSS:n avulla, mitkä maa-asemien liikkeet on mallinnettava?
- 5) Kuinka mallinnettaisiin maa-ajoneuvon tai lentokoneen liikkeitä Kalmanin suotimessa?
- 6) Mitä merkitsee, kun sanotaan että ionosfääri on *dispersii-
vinen*? Kuinka ionosfäärin etenemisviive d_{ion} poistetaan GNSS-pseudoetäisyyden havainnoista?
- 7) Miksi ilmakehän etenemisviiveen tuntemattoman d korvaaminen zeniittiviivetuntemattomalla d^\perp on hyvä idea?
- 8) Millä vertausmalleilla voidaan laskea GNSS-signaalin ionosfäärin etenemisviive?
- 9) Millä vertausmalleilla voidaan laskea troposfäärin etenemisviive? Miten mallit sovelletaan?
- 10) Millä tavalla differentiaalinen paikannus parantaa paikannustarkkuutta?
- 11) Miksi tosiaikainen differentiaalipaikannus vaatii datayhteyden?
- 12) Mikä on vaihekatko?
- 13) Kuvaile RTCM-standardia. Millaisia havaintoja se käsittää?
- 14) Mikä on NTRIP-protokollan tarjoama lisäarvo?
- 15) Mitkä ovat edut ja haitat, kun havaintosuurena käytetään GNSS:n kantoaallon vaihetta eikä koodin pseudoetäisyyttä?



Harjoitus 8 – 1: Dynaamisen mallin 8.17 linearisointi

Minkä näköinen olisi vastaava linearisoitu malli? Ja mitkä ovat dynaamiset yhtälöt likiarvoille $\mathbf{X}^{(0)}$ ja $\mathbf{V}^{(0)}$?



RTK-navigointi

9



9.1 RTK ja kokonaistuntemattomat



9.1.1 Yksinkertainen tapaus

Tutkitaan ensin tosiaikaista kinemaattista mittausta kahdella vastaanottimella niin, että ilmakehän vaikutus jätetään huomioimatta. Se on sallittua, jos vastaanotinten välinen etäisyys on lyhyt. Olkoon A vertausvastaanotin tukiasemalla ja B liikkuva vastaanotin eli *rover*. Kantoaallon vaihe mitataan molemmilla vastaanottimilla. Vertausvastaanottimen mittaustulokset siirretään tietoyhteyden kautta *roveriin*, jossa lasketaan vaihemittausten erotus.

Ensin mitataan kantoaallon vaihe, kun molemmat vastaanottimet ovat tunnetulla pisteellä eli tukiasemalla, katso kuva 8.3. Yhtälöstä 8.4:

$$\frac{1}{2\pi}\phi_{A,(1)}^S + N_A^S = \frac{f}{c}\rho_A^S + f\tau_{A,(1)}^S, \quad \frac{1}{2\pi}\phi_B^S + N_B^S = \frac{f}{c}\rho_B^S + f\tau_{B,(1)}^S,$$

jossa

$$\tau_{A,(1)}^S = \Delta T_A - \Delta t_{(1)}^S, \quad \tau_{B,(1)}^S = \Delta T_B - \Delta t_{(1)}^S$$

ovat vastaanottimen kellon poikkeamien ΔT_A ja ΔT_B sekä saman ajanhetken satelliitin kellon poikkeaman $\Delta t_{(1)}^S$ väliset erotukset. Indeksillä (1) viittaa alkutilanteeseen, jossa molemmat vastaanottimet ovat tunnetulla pisteellä. $f = \omega/2\pi = c/\lambda$ on lineaarinen taajuus, ja c on valon nopeus.

Suureet $N_A^S, N_B^S \in \mathbb{Z}$ ovat tuntemattomia kokonaislukuja eli *kokonaistuntemattomia* eli ambiguiteetteja. Niitä tarvitaan, koska arvot ϕ voidaan mitata vain modulo 2π .

Vähennys antaa vastaanotinten väliset vaihemittausten erotukset hetkellä (1), kun $\rho_B^S = \rho_A^S$:

$$\frac{1}{2\pi}\phi_{AB}^S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}(\phi_B^S - \phi_{A,(1)}^S) = f\Delta T_{AB} - (N_B^S - N_A^S). \quad (9.1)$$

Sen jälkeen liikkuva vastaanotin siirretään tuntemattomalle pisteelle C, jolloin saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\phi_C^S + N_C^S = \frac{f}{c}\rho_C^S + f\tau_{C,(2)}^S, \quad \frac{1}{2\pi}\phi_{A,(2)}^S + N_A^S = \frac{f}{c}\rho_A^S + f\tau_{A,(2)}^S,$$

jossa (2) viittaa uuteen tilanteeseen tuntemattomalla pisteellä ja

$$\tau_{C,(2)}^S = \Delta T_C - \Delta t_{(2)}^S, \quad \tau_{A,(2)}^S = \Delta T_A - \Delta t_{(2)}^S.$$

Vähennyslasku antaa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\phi_{AC}^S &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}(\phi_C^S - \phi_{A,(2)}^S) = \\ &= \frac{f}{c}(\rho_C^S - \rho_A^S) + f\Delta T_{AC} - (N_C^S - N_A^S) = \\ &= \frac{f}{c}(\rho_C^S - \rho_A^S) + f\Delta T_{AB} - (N_B^S - N_A^S). \quad (9.2) \end{aligned}$$

Tässä

$$\Delta T_{AC} = \tau_{C,(2)}^S - \tau_{A,(2)}^S = \Delta T_C - \Delta T_A \approx \Delta T_B - \Delta T_A = \Delta T_{AB}.$$

Tehdään seuraavat oletukset:

- 1) Ei ole tapahtunut ”vaihekatkoa”, siis $N_C^S = N_B^S$.
- 2) Kulunut aika on niin lyhyt, että $\Delta T_C \approx \Delta T_B = \Delta T_A + \Delta T_{AB}$, jossa ΔT_{AB} on *vakioero* eli kahden vastaanottimen kellojen välinen kellopoikkeamien ero. Siis

$$\tau_{B,(1)}^S = \tau_{A,(1)}^S + \Delta T_{AB}, \quad \tau_{C,(2)}^S = \tau_{A,(2)}^S + \Delta T_{AB}.$$

- 3) Tunnetulla pisteellä vertaus- ja liikkuva vastaanotin ovat samassa paikassa¹ eli $\rho_A^S = \rho_B^S$.

Yhtälöissä 9.1 ja 9.2 vasemmat puolet on *mitattu*. Niiden vähennys antaa havaintoyhtälöksi

$$\frac{1}{2\pi}\phi_{AC}^S - \frac{1}{2\pi}\phi_{AB}^S = \frac{f}{c}(\rho_C^S - \rho_A^S),$$

jossa vasen puoli on ”havaittu” suure eli vaihemittausten erotusten erotus, ja oikealla puolella ρ_C^S on *roverin* koordinaattien \mathbf{X}_C eli tämän tasoituserongelman tuntemattomien funktio. Linearisointi tuottaa havaintoyhtälön, jota voidaan käyttää esimerkiksi Kalmanin suotimessa.

¹Käytännöllisemmin ilmaistuna niiden sijaintien välinen (pieni) ero on tarkasti tiedossa.



Huomaa, että sekä suure ΔT_{AB} eli vastaanottimien vakioksi oletettu kelloero että kokonaistuntemattomien ero $N_B^S - N_A^S$ on poistunut. Tämä pätee kaikille satelliiteille $S = 1, \dots, n$.

Tässä lähestymistavassa etenkin oletamus 2 on ongelmallinen. Todellisuudessa vastaanotinten kellopoikkeamat ΔT muuttuvat ajassa, ellei vastaanottimia ole varustettu atomikelloilla. Kenttätason vastaanottimilla ei tavallisesti ole atomikelloja.



9.1.2 Kaksoiserotusten käyttö

Tässä geometriassa on houkuttelevaa käyttää *kaksoiserotuksia*, toisin sanoen havaintosuureita, jotka saadaan laskemalla erotus kahden eri satelliitin avulla saatujen havaintojen välillä. Silloin saadaan tukiasemalla eli vertausvastaanottimella

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \phi_{AB}^{ST} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} (\phi_B^T - \phi_A^T) - \frac{1}{2\pi} (\phi_B^S - \phi_A^S) = \\ &= - \left((N_B^T - N_A^T) - (N_B^S - N_A^S) \right) + f\tau_{AB}^{ST}, \quad (9.3) \end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned} \tau_{AB}^{ST} &= \tau_{AB}^T - \tau_{AB}^S = \\ &= \left((\Delta T_B - \Delta t_{(1)}^T) - (\Delta T_{A,(1)} - \Delta t_{(1)}^T) \right) - \\ &\quad - \left((\Delta T_B - \Delta t_{(1)}^S) - (\Delta T_{A,(1)} - \Delta t_{(1)}^S) \right) = 0, \end{aligned}$$

ja samalla tavalla *roverilla* eli liikkuvalla vastaanottimella

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \phi_{AC}^{ST} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} (\phi_C^T - \phi_A^T) - \frac{1}{2\pi} (\phi_C^S - \phi_A^S) = \\ &= \frac{f}{c} \left((\rho_C^T - \rho_A^T) - (\rho_C^S - \rho_A^S) \right) - \\ &\quad - \left((N_B^T - N_A^T) - (N_B^S - N_A^S) \right) + f\tau_{AC}^{ST}, \quad (9.4) \end{aligned}$$

jossa taas

$$\begin{aligned} \tau_{AC}^{ST} &= \tau_{AC}^T - \tau_{AC}^S = \\ &= \left((\Delta T_C - \Delta t_{(2)}^T) - (\Delta T_{A,(2)} - \Delta t_{(2)}^T) \right) - \\ &\quad - \left((\Delta T_C - \Delta t_{(2)}^S) - (\Delta T_{A,(2)} - \Delta t_{(2)}^S) \right) = 0. \end{aligned}$$

Kaikki kellotuntemattomat ovat hävinneet, ilman vastaanotinten kelloja koskevia oletuksia, kuten $\Delta T_C = \Delta T_B$ tai $\Delta T_{A,(2)} = \Delta T_{A,(1)}$. Tämä on suuri etu kaksoiserotusten käytössä.



Tässä tapauksessa ilmaisu, joka ratkaistaan laittamalla vertausvastaanotin ja liikkuva vastaanotin vierekkäin, on kahdelle satelliitille S ja T :

$$N_{AB}^{ST} \stackrel{\text{def}}{=} (N_B^T - N_A^T) - (N_B^S - N_A^S).$$

Tämä on kokonaisluku. "Havaitaan" kaksoiserotussuureet, yhtälö 9.3:

$$\frac{1}{2\pi} \phi_{AB}^{ST} = -N_{AB}^{ST}, \quad (9.5)$$

kaikille satelliittipareille $S = 1, \dots, n, T = S + 1, \dots, n$, jossa n on satelliittien lukumäärä, ja pyöristetään saadut arvot lähimpään kokonaislukuarvoon.

Löytyneitä arvoja voidaan käyttää suureiden

$$\rho_{AC}^{ST} \stackrel{\text{def}}{=} (\rho_C^T - \rho_A^T) - (\rho_C^S - \rho_A^S)$$

laskemiseksi havainnoista ϕ_{AC}^{ST} . Yhtälö 9.4 antaa

$$\frac{1}{2\pi} \phi_{AC}^{ST} + N_{AB}^{ST} = \frac{f}{c} \rho_{AC}^{ST}. \quad (9.6)$$

Tässä ρ_C^S ja ρ_C^T ovat taas *roverin* koordinaattien \mathbf{X}_C funktiot. Nämä koordinaatit on linearisoinnin jälkeen ratkaistava pienimmän neliösumman menetelmän, esimerkiksi Kalmanin suotimen, avulla.

Helpointa on *float*-ratkaisu. Se saadaan yksinkertaisesti laskemalla kokonaistuntemattomat reaalityyppiset yhtälön 9.5 avulla ja sen jälkeen laskemalla ratkaisu käyttämällä yhtälöä 9.6 havaintoyhtälönä.

Tarkkuuden kannalta on kuitenkin edullista kiinnittää ensin kokonaistuntemattomat N_{AB}^{ST} niiden oikeisiin kokonaislukuarvoihin käyttämällä yhtälöä 9.5 — olettaen, että se voidaan tehdä varmasti ja yksiselitteisesti. Vasta sen jälkeen ratkaistaan \mathbf{X}_C eli *roverin* sijainti. Tämä on tarkempi *fix*-ratkaisu.



9.2 Nopea kokonaistuntemattomien ratkaisu

Edellä kuvattu mittausmenetelmä edellyttää, että liikkuva vastaanotin seisoo ennen kenttämittausta ja tarkistuksen vuoksi myös kenttämittauksen jälkeen vertausvastaanottimen vieressä, eli kyseessä on niin sanottu *ko-lokaatio*. Kenttämittauksessa mitataan useilla tuntemattomilla pisteillä.

Usein ko-lokaatio on hankalaa: vertausvastaanotin voi olla mittausalueen ulkopuolella ja ulkoisen palveluntarjoajan operoima. Tämä on



eräs syy siihen, miksi on keksitty *nopea kokonaistuntemattomien ratkaisu*. Se ei vaadi mitään ko-lokaatiota vertausvastaanottimen kanssa tai edes käyntiä tunnetussa pisteessä — vaikkakin se on aina hyödyllinen tarkistusmielessä.

Menetelmä toimii parhaiten, jos liikkuvan vastaanottimen ja vertausvastaanottimen välinen etäisyys on niin lyhyt, luokkaa 10–20 km, että vastaanotinten väliset differentiaaliset ilmakehä- ja ratavirheet voidaan jättää huomioimatta. Tässä tapauksessa yhtälö 9.6 on

$$\frac{1}{2\pi}\phi_{AC}^{ST} + N_{AC}^{ST} = \frac{f}{c}\rho_{AC}^{ST},$$

jossa

$$N_{AC}^{ST} = (N_C^T - N_A^T) - (N_C^S - N_A^S), \quad \rho_{AC}^{ST} = (\rho_C^T - \rho_A^T) - (\rho_C^S - \rho_A^S).$$

Tässä etäisyyden kaksoiserotukset ρ_{AC}^{ST} ovat puhtaasti geometrisia. Jos kirjoitetaan auki satelliiteille $S = 1, \dots, n$, $T = S + 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \rho_C^S &= \sqrt{(x^S - X_C)^2 + (y^S - Y_C)^2 + (z^S - Z_C)^2}, \\ \rho_C^T &= \sqrt{(x^T - X_C)^2 + (y^T - Y_C)^2 + (z^T - Z_C)^2}, \end{aligned}$$

näkyvät, että ainoat tuntemattomat ovat liikkuvan vastaanottimen paikka-koordinaatit

$$\mathbf{X}_C = \begin{bmatrix} X_C & Y_C & Z_C \end{bmatrix}^T.$$

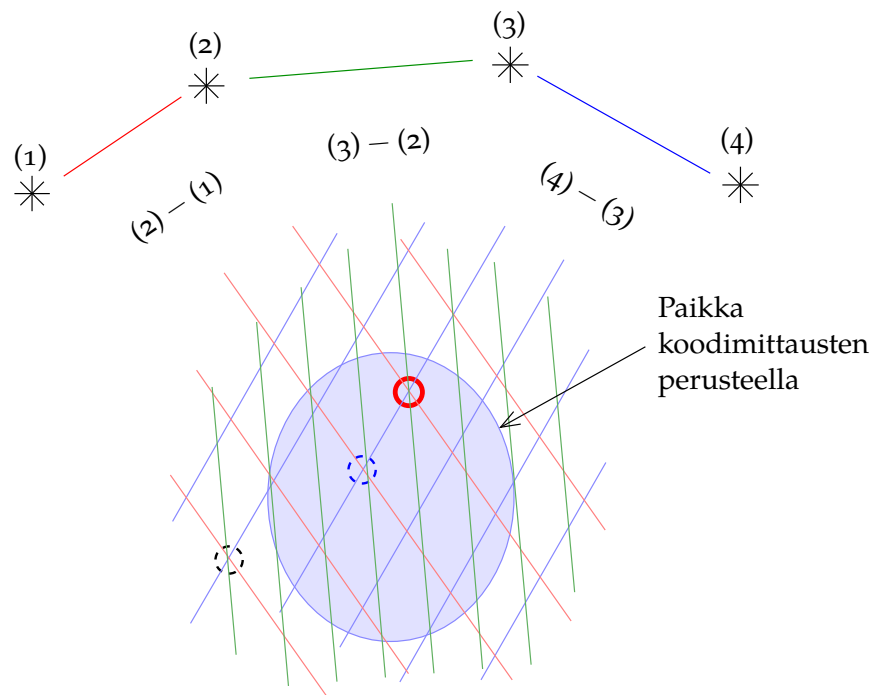
Liikkuvan vastaanottimen paikka tunnetaan muutaman metrin tarkkuudella GNSS-koodimittauksen ansiosta, jolla ei ole kokonaistuntemattomien ongelmaa. Siksi riittää, että mahdollisten vastaanottimen paikkojen joukosta eli etsintäavaruudesta, joka kuuluu joukkoon \mathbb{R}^3 , etsitään ainoastaan ne paikat \mathbf{X}_C , joille *kaikki* arvot, kaikille satelliittipareille S, T ,

$$N_{AC}^{ST} = \rho_{AC}^{ST} - \frac{1}{2\pi}\phi_{AC}^{ST}$$

ovat kokonaislukuja, katso kuva 9.1.

Kääntäen, jos on n satelliittia, on $n - 1$ riippumattonta kokonaistuntemattomaa N_{AC}^{ST} . Nämä kokonaistuntemattomien yhdistelmät eli kaksoiserotukset ovat siis $n - 1$ -ulotteisen avaruuden alkioita. Jos jokaisella kokonaistuntemattomalla on esimerkiksi kymmenen mahdollista arvoa, jotka ovat yhteensopivia koodimittauksesta saadun likisijainnin kanssa, antaa tämä jo 10^{n-1} eri kokonaistuntemattomien kaksoiserotusta. Jos on kahdeksan satelliittia, luku on kymmenen miljoonaa, mikä on





KUVA 9.1. Kokonaistuntemattomien ratkaisu. Ratkaisun on oltava yhteensopiva kaikkien kokonaistuntemattomien kaksoiserotusten kanssa (punainen), mutta myös kontrastin toiseksi parhaiten sopivan (sinisen) ratkaisun kanssa on oltava selkeä.



luultavasti liikaa vaihtoehtoja tutkittavaksi tosiajassa laitteessa, jolla on rajallinen laskentateho.

Kuitenkin havaitaan, että kokonaistuntemattomien vaihtoehtoista vain hyvin pieni osa on yhteensopiva liikkuvan vastaanottimen *tietyn* sijainnin kanssa: keskenään yhteensopivat kokonaistuntemattomien yhdistelmät kuuluvat kokonaistuntemattomien muodostaman avaruuden *kolmiulotteiseen aliavaruuteen*, jonka eräs parametrus on koordinaatit $\begin{bmatrix} X_C & Y_C & Z_C \end{bmatrix}^T$, kuten yllä jo huomautettiin.

Vuosien saatossa on kehitetty ovelia ja tehokkaita menetelmiä kokonaistuntemattomien ratkaisemiseksi tässä sisäisesti yhteensopivassa aliavaruudessa, kuten **LAMBDA**-menetelmä (Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment, **Teunissen ym. 1997**).

Kuvatunlainen kokonaistuntemattomien ratkaisumenetelmä onnistuu ilmeisesti vain, jos vertaus- ja liikkuvan vastaanottimen välinen matka on riittävän lyhyt, käytännössä alle 10–20 km. Siinä tapauksessa voidaan käyttää hyväksi sitä seikkaa, että satelliitit lähettävät signaalia kahdella tai jopa kolmella eri kanta-aaltotaajuudella. Voimme siis muodostaa *leveäkuja*-havaintosuureita. Kokonaistuntemattomien



ratkaisua saadaan joko heti tai muutaman epookin jälkeen.

Kokonaistuntemattomien ratkaisu on mahdollinen myös pitemmille vektoreille, mutta se on hankalampi, koska huomioon on otettava ilmakehän vaikutus.

Kalmanin suotimessa kokonaistuntematon lisätään tilavektoriin tuntemattomana N_{AC}^{ST} , mutta aluksi reaaliarvoisena alkiona. Oletetaan, että liikkuvan vastaanottimen C lisäksi alueella on kiinteä vertausvastaanotin tai vastaanotinten verkko A. Suotimen havaintosuureet ovat kantoaaltovaiheen kaksoiserotuksia, tyyppi ϕ_{AC}^{ST} .

Kun suodin etenee ajassa, arvoon N_{AC}^{ST} sidottu tilavarianssi pienenee ja pienenee, kunnes on mahdollista samaistaa reaaliarvoinen tuntematon yksiselitteisesti erääseen kokonaislukuun.

Käytännössä jokaiselle epookille — kaksoiserotusyhtälö 9.4 — ei ole vain yhtä havaintoyhtälöä, vaan monta. Jos käyttökelpoisten satelliittien lukumäärä taivaalla on n , tavallisesti 4–12, riippumattomien kokonaistuntemattomien N_{AC}^{ST} määrä on $n - 1$. Tällä kokonaistuntemattomien joukolla eli vektorilla on *tilavarianssimatriisi*, jonka koko on $(n - 1) \times (n - 1)$. Tyypillisesti tämän matriisin virhe-ellipsoidi on hyvin pitkänomainen ”hyper-sikari”, jonka pääakseleista kolme on pitkiä ja muut lyhyitä.

On analysoitava, sijaitseeko koko arvojen N_{AC}^{ST} joukko eli vektori kaikille satelliittipareille S, T riittävän lähellä jonkun kokonaislukuarvojen joukkoa, joka edustaa yhtä pistettä pisteiden muodostamassa hilassa abstraktissa vektoriavaruudessa \mathbb{R}^{n-1} .

”Riittävän lähellä” pitää ymmärtää tämän tilavarianssimatriisin suhteen. Olkoon

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_{AC}^{1,2} & v_{AC}^{1,3} & \dots & v_{AC}^{1,n-1} \end{bmatrix}^T, \quad v_{AC}^{ST} = \hat{N}_{AC}^{ST} - N_{AC}^{ST},$$

riippumattomien erojen vektori reaaliarvoisten estimaattoreiden

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{AC}^{1,2} & \hat{N}_{AC}^{1,3} & \dots & \hat{N}_{AC}^{1,n-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n-1}$$

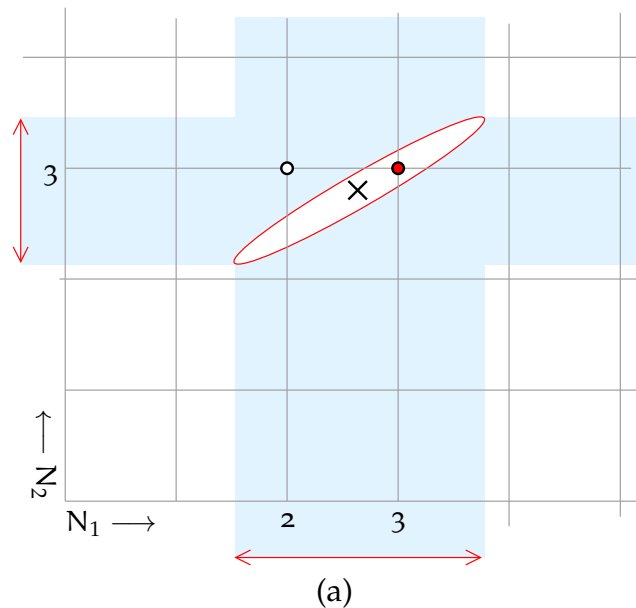
ja kokonaislukuehdokkaiden

$$N_{AC}^{ST} = \begin{bmatrix} N_{AC}^{1,2} & N_{AC}^{1,3} & \dots & N_{AC}^{1,n-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{Z}^{n-1}$$

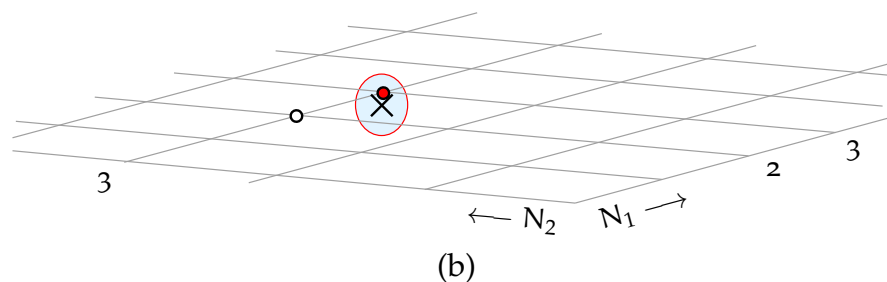
välillä. Silloin ”etäisyyden” neliön roolissa oleva suure on

$$\underline{\mathcal{E}}_1 = \underline{\mathbf{v}}^T \text{Var}^{-1}\{\underline{\mathbf{v}}\} \underline{\mathbf{v}}.$$





Kokonaistuntemattomien ratkaisu yksitellen ei tuota ratkaisun N_1 arvoksi 3:a



Useiden kokonaistuntemattomien tilavarianssiellipsoidit ovat usein hyvin pitkänomaisia "sikareita". **LAMBDA**-menetelmä ratkaisee (N_1, N_2) arvopariksi $(3, 3)$

KUVA 9.2. Kokonaistuntemattomien fiksu ratkaiseminen. **LAMBDA**-menetelmässä kokonaistuntemattomat muunnetaan kokonaisarvoisiksi lineaariyhdistelmiksi, jolloin virhe-ellipsin muoto muuttuu (melkein) ympyräksi. Alemmassa kuvassa oikea ratkaisu on mitä ilmeisimmin hilapiste, joka on lähimpänä reaaliarvoista ratkaisua (rasti).



Tämä suure on jakautunut khii-toiseen-jakauman mukaan niin, että vapausasteiden lukumäärä on $n - 1$ eli χ_{n-1}^2 .

Tilavarianssimatriisi toimii siis metrisenä tensorina mitattaessa kokonaistuntemattomien ratkaisun tarkkuutta.

Sen sijaan, että käytettäisiin satelliittia 1 vertaussatelliittina, voidaan käyttää myös muita $n - 1$ riippumatonta kaksinkertaista erotusta tai



niiden lineaarisia yhdistelmiä. Silloin \underline{v} ja $\text{Var}\{\underline{v}\}$ muuttuvat, mutta $\underline{\epsilon}_1$ on invariantti.

Ratkaisun tulee olla riittävän hyvä, mutta sen lisäksi myös riittävän yksiselitteinen: tarvitaan selkeä *kontrasti* toiseksi parhaaseen ratkaisuun. Eräs menetelmä tämän testaamiseksi on Fisherin F-testi.

Yleensä tämä kaikkien kokonaistuntemattomien yhteisratkaisu onnistuu jo paljon ennen kuin yksittäiset kokonaistuntemattomat saadaan ratkaistuksi erikseen. Tähän on kehitetty hienoja algoritmeja, joista **LAMBDA**-menetelmä (TU Delft, **LAMBDA**) on hyvä esimerkki.



9.3 RTK-mittauksen geometrinen analyysi

Tosiaikaista kinemaattista menetelmää voidaan käyttää kahdella eri tavalla eli geometrialla:

- 1) käyttämällä yhtä tukiasemaa
- 2) käyttämällä tukiasemien verkkoa.

Seuraavassa merkintätapa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ merkitsee ortogonaalista yksikkövektorikolmikkoa eli kolmiulotteisen avaruuden *ortonormaalista kantaa*. Jokainen vektori avaruudessa voidaan kirjoittaa näiden kantavektorien lineaariyhdistelmänä.

Ensin katsotaan, miten **GNSS**-satelliittien ratavirheet ja kellopoikkeamat kulkeutuvat paikannusratkaisuun yhden tukiaseman tapauksessa, ja sen jälkeen esitetään kolmen tukiaseman tapaus.



9.3.1 Yksi tukiasema

Yhden tukiaseman tapauksessa kirjoitetaan havaintosuure seuraavasti niin, että unohdetaan hetkeksi kokonaistuntemattomat, ilmakehä ja muut mutkistavat tekijät:

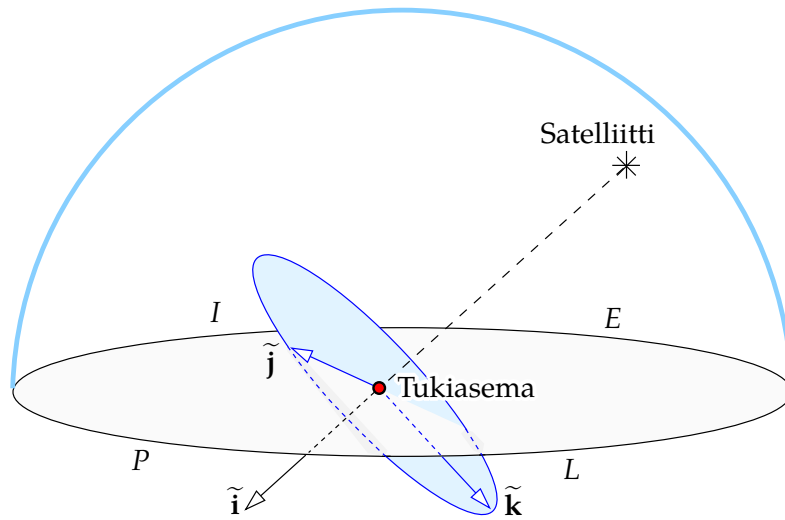
$$\bar{P} = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} + c(\Delta T - \Delta t).$$

Tässä $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ on satelliitin, $\mathbf{X} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ vastaanottimen paikkavektori, kun $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on ortonormaali kanta, joka on tässä oletettu geosentriseksi. Ilmaisu

$$\rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$$

on geometrinen etäisyys satelliitin ja vastaanottimen välillä.





KUVA 9.3. Satelliitin näkölinjaan sidottu ortonormaali kanta $\{\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}\}$.

Nyt valitaan *vaihtoehtoinen* "näkölinjan" ortonormaali kanta, jossa $\tilde{\mathbf{i}}$ osoittaa satelliitilta tukiasemalle ja $\tilde{\mathbf{j}}$ ja $\tilde{\mathbf{k}}$ ovat keskenään sekä $\tilde{\mathbf{i}}$:ta kohti kohtisuoria. Kantavektorit muodostetaan seuraavasti:

$$\tilde{\mathbf{i}} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{X}_0\|}, \quad \tilde{\mathbf{j}} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{i}} \times \mathbf{X}_0 \rangle}{\|\langle \tilde{\mathbf{i}} \times \mathbf{X}_0 \rangle\|}, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \langle \tilde{\mathbf{i}} \times \tilde{\mathbf{j}} \rangle,$$

jossa \mathbf{X}_0 on tukiaseman geosentrinen sijainti: vektori, joka osoittaa aseman zeniitin suuntaan.

Olkoon ratavirheiden vaikutus satelliitin hetkelliseen sijaintiin avaruudessa $\Delta \mathbf{x} = \Delta \tilde{x} \tilde{\mathbf{i}} + \Delta \tilde{y} \tilde{\mathbf{j}} + \Delta \tilde{z} \tilde{\mathbf{k}}$ ja satelliitin kellopoikkeama Δt , jo oletetusti pieni. Niiden vaikutus pseudoetäisyyteen on

$$\Delta \bar{P} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \tilde{x}} \Delta \tilde{x} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \tilde{y}} \Delta \tilde{y} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \tilde{z}} \Delta \tilde{z} + c \Delta t. \quad (9.7)$$

Olkoon

$$\begin{aligned} \rho_0 = \|\mathbf{x} - \mathbf{X}_0\| &= \sqrt{(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 + (z - Z_0)^2} = \\ &= \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{X}_0)^2 + (\tilde{y} - \tilde{Y}_0)^2 + (\tilde{z} - \tilde{Z}_0)^2} \end{aligned}$$

satelliitin

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \tilde{x}\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{y}\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{z}\tilde{\mathbf{k}}$$

ja tukiaseman

$$\mathbf{X}_0 = X_0\mathbf{i} + Y_0\mathbf{j} + Z_0\mathbf{k} = \tilde{X}_0\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{Y}_0\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{Z}_0\tilde{\mathbf{k}}$$



välinen etäisyys. Olkoon lisäksi liikkuvan vastaanottimen eli ”*roverin*” paikka

$$\mathbf{x} = \tilde{X}\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{Y}\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{Z}\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{X}_0 + \xi)\tilde{\mathbf{i}} + (\tilde{Y}_0 + \eta)\tilde{\mathbf{j}} + (\tilde{Z}_0 + \chi)\tilde{\mathbf{k}}.$$

Tässä ξ, η ja χ ovat nyt *roverin* koordinaatit tukiaseman suhteen yllä sovitussa koordinaatistossa. Tukiaseman ja *roverin* välinen etäisyys on

$$s = \|\mathbf{s}\| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \chi^2}, \quad \mathbf{s} = \xi\tilde{\mathbf{i}} + \eta\tilde{\mathbf{j}} + \chi\tilde{\mathbf{k}}.$$

Kirjoitetaan yhtälö 9.7 auki *roverille*:

$$\Delta\bar{P} = \frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho} \Delta\tilde{x} + \frac{\tilde{y} - \tilde{Y}}{\rho} \Delta\tilde{y} + \frac{\tilde{z} - \tilde{Z}}{\rho} \Delta\tilde{z} + c \Delta t,$$

jossa

$$\begin{aligned} \rho = \|\mathbf{x} - \mathbf{X}\| &= \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} = \\ &= \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{X})^2 + (\tilde{y} - \tilde{Y})^2 + (\tilde{z} - \tilde{Z})^2}. \end{aligned}$$

Siis erikseen tukiasemalle ja *roverille*

$$\begin{aligned} \Delta\bar{P}_0 &= \frac{\tilde{x} - \tilde{X}_0}{\rho_0} \Delta\tilde{x} + \frac{\tilde{y} - \tilde{Y}_0}{\rho_0} \Delta\tilde{y} + \frac{\tilde{z} - \tilde{Z}_0}{\rho_0} \Delta\tilde{z} + c \Delta t, \\ \Delta\bar{P} &= \frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho} \Delta\tilde{x} + \frac{\tilde{y} - \tilde{Y}}{\rho} \Delta\tilde{y} + \frac{\tilde{z} - \tilde{Z}}{\rho} \Delta\tilde{z} + c \Delta t. \end{aligned}$$

Ero niiden välillä on *roverin* paikannuksen virhe, joka johtuu sen etäisyydestä tukiasemalta:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{P} - \Delta\bar{P}_0 &= \left(\frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho} - \frac{\tilde{x} - \tilde{X}_0}{\rho_0} \right) \Delta\tilde{x} + \\ &+ \left(\frac{\tilde{y} - \tilde{Y}}{\rho} - \frac{\tilde{y} - \tilde{Y}_0}{\rho_0} \right) \Delta\tilde{y} + \left(\frac{\tilde{z} - \tilde{Z}}{\rho} - \frac{\tilde{z} - \tilde{Z}_0}{\rho_0} \right) \Delta\tilde{z}. \end{aligned}$$

Tästä on hävinnyt satelliitin kellopoikkeama.

Tutkitaan kerrointa

$$\left(\frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho} - \frac{\tilde{x} - \tilde{X}_0}{\rho_0} \right)$$

lähemmin. Jos määritellään funktio

$$f(\tilde{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho(\tilde{x}, \tilde{X}, \tilde{y}, \tilde{Y}, \tilde{z}, \tilde{Z})},$$



tämä kerroin on

$$\begin{aligned} f(\tilde{X}) - f(\tilde{X}_0) &\approx \left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}} \right|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} (\tilde{X} - \tilde{X}_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{X}^2} \right|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} (\tilde{X} - \tilde{X}_0)^2 + \dots = \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}} \right|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{X}^2} \right|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} \xi^2 + \dots, \end{aligned}$$

Taylorin kehitelmä. Jos otetaan tästä vain ensimmäinen termi, saadaan

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}} \right|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} = -\frac{1}{\rho_0} + \frac{(\tilde{x} - \tilde{X}_0)^2}{\rho_0^3}, \quad (9.8)$$

ja samalla tavalla funktioille $f(\tilde{Y})$ ja $f(\tilde{Z})$. Saadaan

$$\begin{aligned} \Delta \bar{P} - \Delta \bar{P}_0 &= \left(\frac{(\tilde{x} - \tilde{X}_0)^2}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho_0} \right) \xi \Delta \tilde{x} + \\ &+ \left(\frac{(\tilde{y} - \tilde{Y}_0)^2}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho_0} \right) \eta \Delta \tilde{y} + \left(\frac{(\tilde{z} - \tilde{Z}_0)^2}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho_0} \right) \chi \Delta \tilde{z}. \end{aligned}$$

Kun koordinaattiakselit on määritelty yllä kuvatulla tavalla, on

$$\tilde{x} - \tilde{X}_0 = -\rho_0, \quad \tilde{y} - \tilde{Y}_0 = 0, \quad \tilde{z} - \tilde{Z}_0 = 0 \quad (9.9)$$

ja saamme

$$\Delta \bar{P} - \Delta \bar{P}_0 = -\frac{1}{\rho_0} (\eta \Delta \tilde{y} + \chi \Delta \tilde{z}). \quad (9.10)$$

Näkyi, että virhe on lineaarisesti verrannollinen etäisyyteen tukiasemalta ja vaikutusta on *vain etäisyydellä sivusuunnassa satelliitin näkölinjasta*.

Pannaan merkille, että yhtälön johtamistapa on *symmetrinen* vektorien \mathbf{X} ja \mathbf{X}_0 suhteen kannan $\{\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}\}$ määrittelyssä: olisimme voineet suunnata vektori $\tilde{\mathbf{i}}$ myös satelliitin näkölinjaa pitkin *roverin* sijaintiin.

Todellisuudessa pseudoetäisyyden korjaus ei ole tarkasti lineaarinen: tutkitaan kvadraattista yhtälöä

$$f(\tilde{X}) - f(\tilde{X}_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}} \right|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{X}^2} \right|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} \xi^2 + \dots$$

Johdettiin jo yhtälön 9.8 yhteydessä

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}} \right|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} = -\frac{1}{\rho} + \frac{(\tilde{x} - \tilde{X})^2}{\rho^3}.$$



Differentioidaan vielä kerran:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{X}^2} \Big|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} &= \left(-\frac{\tilde{x}-\tilde{X}}{\rho^3} - 2\frac{\tilde{x}-\tilde{X}}{\rho^3} + 3\frac{(\tilde{x}-\tilde{X})^3}{\rho^5} \right) \Big|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} = \\ &= 3 \left(\frac{(\tilde{x}-\tilde{X}_0)^3}{\rho_0^5} - \frac{\tilde{x}-\tilde{X}_0}{\rho_0^3} \right), \end{aligned}$$

ja samalla tavalla funktioille $f(\tilde{Y})$ ja $f(\tilde{Z})$. Taas (yhtälöt 9.9):

$$\tilde{x} - \tilde{X}_0 = -\rho_0, \quad \tilde{y} - \tilde{Y}_0 = 0, \quad \tilde{z} - \tilde{Z}_0 = 0$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{X}^2} \Big|_{\tilde{X}=\tilde{X}_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{Y}^2} \Big|_{\tilde{Y}=\tilde{Y}_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{Z}^2} \Big|_{\tilde{Z}=\tilde{Z}_0} = 0.$$

Tämä on hieman yllättävä, mutta miellyttävä tulos. Sen takana on havaintoyhtälön 9.7 linearisointi eli oletus, että satelliitin ratavirhe Δx on pieni. Se onkin nykyisin vain metrien suuruusluokkaa, kun roverin etäisyys s tukiasemalta voi olla monta kilometriä.



9.3.2 Kolmen tukiaseman tapaus

Koska tukiasemien verkon tapaus voidaan yleensä redukoida kolmen tukiaseman tapaukseen, tutkimme vain tätä tapausta.

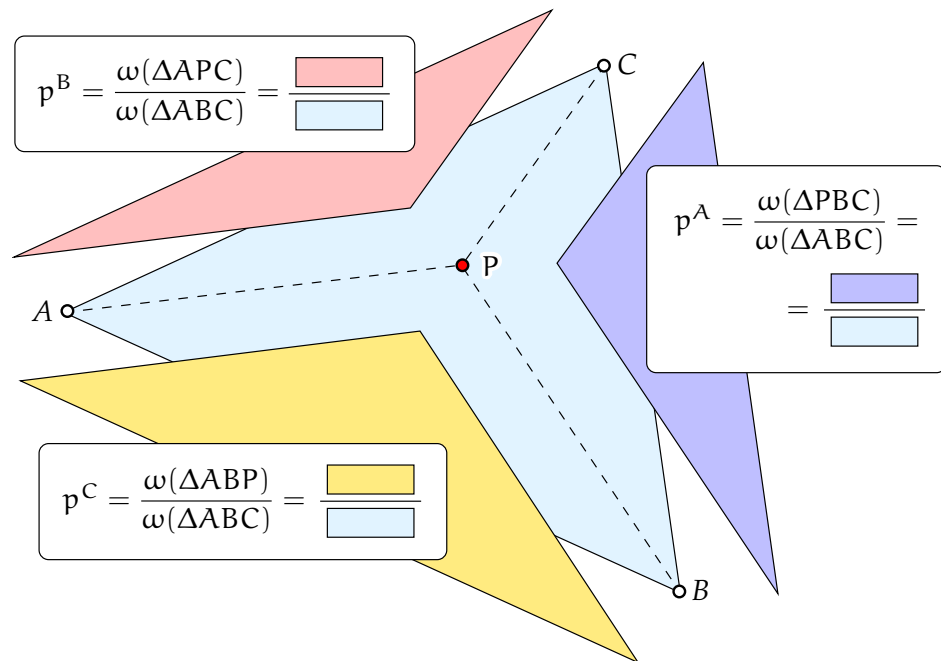
Lähdetään yllä johdetuista yhtälöistä. Yhtälö 9.10 on *lineaarinen* parametreissa η ja χ , jotka voimme tulkita tason koordinaateiksi kahdessa eri suunnassa, jotka ovat keskenään kohtisuorassa. $\Delta \tilde{y}$ on satelliitin paikkavirhe "vasen-oikea"-suunnassa ja $\Delta \tilde{z}$ "ylöspäin" taivaan kannella zeniitin suuntaan myös kohtisuorassa satelliitin näkölinjaan nähden.

Koska yhtälö 9.10 on bilineaarinen koordinaateissa (η, χ) , voidaan korjaus *interpoloida* lineaarisesti, kun se on määritetty kolmella tukiasemalla. Jos annettuna on tukiasemat A, B ja C sekä mitatut korjaukset $\Delta \bar{P}_A, \Delta \bar{P}_B$ ja $\Delta \bar{P}_C$, mielivaltaisen pisteen korjaus voidaan laskea seuraavasti:

$$\Delta \bar{P} = p^A \Delta \bar{P}_A + p^B \Delta \bar{P}_B + p^C \Delta \bar{P}_C. \quad (9.11)$$

Tässä yhtälössä p^A, p^B ja p^C ovat laskentapisteen *barysentriset koordinaatit*





KUVA 9.4. Barysentriset koordinaatit. Suureet ω ovat kolmioiden pinta-alat, ja ne voidaan laskea determinantteina, yhtälö 9.12.

kolmion sisällä, katso kuva 9.4:

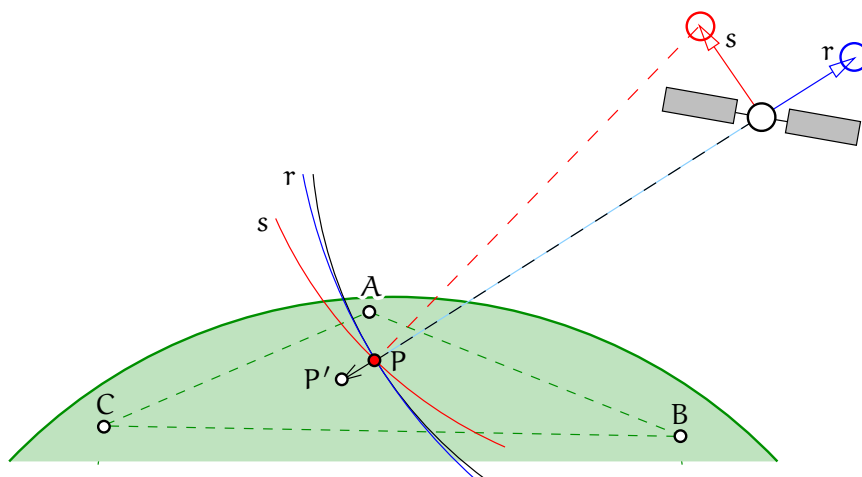
$$p^A = \frac{\begin{vmatrix} \eta_B & \eta_C & \eta \\ \chi_B & \chi_C & \chi \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta_A & \eta_B & \eta_C \\ \chi_A & \chi_B & \chi_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, p^B = \frac{\begin{vmatrix} \eta_C & \eta_A & \eta \\ \chi_C & \chi_A & \chi \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta_A & \eta_B & \eta_C \\ \chi_A & \chi_B & \chi_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, p^C = \frac{\begin{vmatrix} \eta_A & \eta_B & \eta \\ \chi_A & \chi_B & \chi \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta_A & \eta_B & \eta_C \\ \chi_A & \chi_B & \chi_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}. \quad (9.12)$$

Tässä on käytetty koordinaatteja (η, χ) . Barysentrisille koordinaateille pätee² $p^A + p^B + p^C = 1$, ja ne ovat kaikki kolme *lineaarisia* sekä η - että χ -koordinaatissa. Yksinkertaisesti sijoittamalla voidaan varmistaa, että kolmion kärjissä, esimerkiksi pisteessä A, $p^A = 1$ ja $p^B = p^C = 0$ — *toisto-ominaisuus*.

Yhtälössä 9.10 esiintyy vain η ja χ ja vain lineaarisesti. Yhtälö on voimassa kolmiulotteisessa avaruudessa, jossa paikkaerovektori tukiaseman ja *roverin* välillä on $\mathbf{s} = \xi\tilde{\mathbf{i}} + \eta\tilde{\mathbf{j}} + \chi\tilde{\mathbf{k}}$.

Interpoloinnissa kolmen tukiaseman välillä tulisi ottaa huomioon Maan pinnan kaarevuus: kaikkien neljän pisteen on oltava samassa

²Barysentriset koordinaatit ovat *painoja*, ja yhtälö 9.11 antaa kärkien arvojen painotetun keskiarvon.



KUVA 9.5. Differentiaali-GNSS:n geometria. Satelliitin säteittäinen ratavirhe r ei vaikuta vahvasti eri maa-asemien välisiin erotushavaintoihin, mutta sivuttainen ratavirhe s sen sijaan vaikuttaa suhteessa asemien väliseen etäisyyteen.

Kuvattu on myös differentiaalikorjauksen laskentatapa: *roverin* paikka avaruudessa P on projisoitava satelliitin näkölinjaa pitkin tukiasemien kautta menevään tasoon ABC , mikä tuottaa projektiopisteen P' . Sen jälkeen korjaus on interpoloitava bilineaarisesti.



tasossa. Tasoyhtälöt, kuten 9.11, sovellettuina karttatasossa ovat periaatteessa vääriä. Tehty virhe on kuitenkin häviävän pieni silloinkin, kun kolmio on kymmenien kilometrien kokoinen. Oikea laskentatapa on projisoida *roverin* paikka tasoon, joka menee kolmen tukiaseman läpi, kuten on esitetty kuvassa 9.5.



9.4 Tukiasemaverkot

Verkkomaisen RTK-ratkaisun toteuttamiseksi käytetään useita tukiasemia ja korjaukset *interpoloidaan* jollain tavalla niiden välillä käyttäjän sijaintiin.

Voidaan käyttää kahta eri tietoliikenteen perusmenetelmää:

- 1) Yleislähetys ("*broadcast*"): korjaukset lähetetään monelle käyttäjälle yhtä aikaa. Lähetys voi käyttää esimerkiksi radiolähettyksen ULA-sivukaistaa (RDS, Radio Data System). Menetelmä skaalautuu hyvin myös suurelle joukolle käyttäjiä. Yleislähettyksen haasteena on, että viestiä ei voida räätälöidä niin, että käyttäjän sijainti otettaisiin huomioon. Ehkä siksi sitä on käytetty enimmäkseen vain vähemmän tarkkaan koodipohjaiseen GNSS-differentiaalipaikan-

nukseen eikä **RTK**:n viestien välitykseen.

- 2) Täsmälähetys ("*singlecast*"): korjaukset lasketaan yhtä käyttäjää varten ja lähetetään hänelle esimerkiksi mobiiliin Internetin välityksellä. Jokaisen käyttäjän korjausviestin sisältö voi olla erilainen. Eräs täsmälähetysmenetelmän variantti on *virtuaalitukiasemamenetelmä* (**VRS**, *virtual reference station*), jossa tukiasemien korjaukset interpoloidaan "virtuaalitukiaseman" korjauksiksi havaitsijan välittömässä läheisyydessä. Tämän lähestymistavan etuna on, että vastaanotin ei tiedä, että korjaukset eivät tule todelliselta, fyysiseltä **RTCM**-tukiasemalta, jota kaikki tunnetut vastaanotinmerkit osaavat käsitellä.

Ilmeisin interpolointitekniikka on raa'an voiman interpolointi. Oletetaan, että korjaus on jatkuva ja hitaasti muuttuva paikan funktio Maan pinnalla. Bilineaariselle funktiolle riittää kolme tukiasemaa mittausalueen ympärillä.

Eräs tähän lähestymistapaan perustuva tekniikka on nimeltään **FKP**, *Flächenkorrekturparameter* eli aluekorjausparametrit (Janssen, 2009). Se perustuu bilineaarimallien estimointiin tukiasemien ympärillä erikseen troposfäärin ja ionosfäärin etenemisviiveille. Korjausparametrit lähetetään kaikille alueen vastaanottimille: tämä on *yleislähetysmenetelmä*. Liikkuva vastaanotin suorittaa interpolointilaskelman omalle sijainnilleen. Korjausten lähettämiseksi on käytetty **RTCM** 2.x -standardin viestityyppejä 59, "proprietary message", katso taulu 8.1.

Muita samanlaisia interpolointimenetelmiä ovat **MAC** (Master-Auxiliary Concept) ja **MAX** (Master-Auxiliary Corrections), **Leica Geosystems** (2005). Näissä menetelmissä lähetetään "mahdollisimman raakoja" kantoaaltovaihehavaintoja useilta tukiasemilta kentällä oleville käyttäjille (Janssen, 2009). Verkon yhdestä asemasta tehdään pääasema eli "*master*", ja vain sen differentiaalikorjaukset lähetetään sellaisinaan, erikseen troposfäärin ja ionosfäärin osat. Muilta verkon asemilta lähetetään vain differentiaalikorjausten *erot* pääasemaan nähden. Nämä erot ovat numeerisesti pienempiä ja muuttuvat ajassa hitaammin.

Tässä lähestymistavassa *rover* suorittaa täydellisen interpolointityön kaikkien tukiasemien välillä. *Roverin* laskentatyön rajoittamiseksi verkon palvelimen on ensin ratkaistava tukiasemaverkon kokonaistunte-mattomat niin, että roverin vastaanottamat eri tukiasemien korjaukset ovat ainakin keskenään "kokonaislukuyhteensopivia". Tätä kokonaistunte-mattomien ratkaisemista helpottaa se seikka, että asemat ovat



tunnetuissa kiinteissä paikoissa.

Sen jälkeen *roverin* tarvitsee ratkaista vain omat kokonaistuntemat-
tomat *masterin* kanssa, ja saadut arvot pätevät minkä tahansa verkon
muun tukiaseman kanssa. Lisäksi kun käyttää vain kolmea lähintä tu-
kiasemaa, viereiseen kolmioon siirtyvä *rover* voi vaihtaa saumattomasti
tukiasemia.

RTCM-standardi 3.x mahdollistaa **MAX**in monitukiasemaviestien kom-
paktin muodon lähettämisen.

Interpolointi on toimiva ratkaisu ainakin satelliittien ratavirheiden
ja kellopoikkeamien vaikutusten korjaamiseksi, koska vaikutus on
luonteeltaan *deterministinen*: se voidaan laskea tarkasti liikkuvan vastaan-
ottimen paikkaan, jos annettuna on kolmen tukiaseman havaintoja eli
pseudoetäisyyden korjauksia ja tukiasemat ovat kauniissa kolmiossa
mittauspaikan ympärillä.

Ilmakehän etenemisviiveille raaka interpolointi jättää kuitenkin pa-
rantamisen varaa, elleivät asemien väliset etäisyydet ole alle noin 80 km:
silloin tarvitaan myös ilmakehän mallinnusta. Monimutkaisempi ilma-
kehän mallinnus tehdään mieluummin palvelinpuolella.



9.5 Ilmakehän mallinnus

Ilmakehän vaikutus ei ole deterministinen vaan *stokastinen*. Siksi tarkka
interpolointi *roverin* paikkaan ei onnistu: epätarkkuus kasvaa, kun etäi-
syys tukiasemilta kasvaa. Kasvutapa riippuu ilmakehän tilastollisista
ominaisuuksista. Tähän tarvitaan ilmakehän mallinnusta.

Ilmakehän — sekä ionosfäärin että troposfäärin — aiheuttama **GNSS**-
signaalin etenemisviive redukoituna zenitiin suuntaiseksi standardiko-
konaisviiveeksi, *zenith total delay* eli **ZTD**, muodostaa *stokastisen prosessin*
 $\underline{d}^\perp(\varphi, \lambda)$. Prosessi on määritelty maantieteellisen paikan (φ, λ) määrit-
telyjoukolla.

Prosessilla $\underline{d}^\perp(\varphi, \lambda)$ on kahden paikan välillä *signaalikovarianssifunk-
tio*, jota voidaan kuvata esimerkiksi Gaussin ja Markovin kaltaisella
kovarianssikaavalla:

$$\text{Cov}\{\underline{d}^\perp(\varphi_1, \lambda_1), \underline{d}^\perp(\varphi_2, \lambda_2)\} = C_0 \exp(-\psi/\psi_0), \quad (9.13)$$

jossa ψ on pisteiden (φ_1, λ_1) ja (φ_2, λ_2) välinen kulmaetäisyys Maan
keskipisteestä katsottuna. Vakiota C_0 kutsutaan *signaalivarianssiksi* ja



vakiota ψ_0 *korrelaatiopituudeksi*. Vakiot voidaan valita sopiviksi eli realistisiksi tietyn ajan ja paikan tropo- ja ionosfäärille.

Toinen lähestymistapa on mallintaa ilmakehä deterministisesti joukolla tuntemattomia parametreja³. Esimerkiksi globaali ionosfääri voidaan hyvin esittää pallofunktiokehitemänä. Myös polynomi- tai Fourier'n kehitemä tulee kysymykseen. Tuntemattomat parametrit estimoidaan tukiasemien havainnoista.

Etenemispolun *sijainnin* (φ, λ) määritelmä on mielenkiintoinen ongelma: se voisi olla polun pisteiden keskimääräinen sijainti painotettuna taiteaineen tiheydellä. Ionosfäärille tämä ilmaistaan usein edustavan ”lävistyskohdan” sijaintina ionosfäärin keskikorkeudella.

Estimoitava suure voidaan siis esittää maantieteellisen sijainnin yleisenä funktiona $d^\perp(\varphi, \lambda)$, jonka ratkaiseminen vaatii vastaanottimien verkon mittauksia. Tästä on pieni askel lisätä ongelmaan myös kolmas ulottuvuus ja estimoida $d(\varphi, \lambda, h)$ kaikkialla ilmakehässä — tai vastaavasti elektronitiheys N_e , katso yhtälö 8.13, tai taitekerroin N , katso yhtälö 8.14. Tätä tekniikkaa kutsutaan *ilmakehän GNSS-tomografiaksi*.

Jos käytävissä on hyvä ilmakehämalli, GNSS-tukiasemaverkon operaattori voi käyttää sitä esimerkiksi troposfäärin etenemisviiveiden interpoloinnin parantamiseksi.

Toinen vaihtoehto on assimiloida tukiasemaverkon havainnoista saatuja vesihöyryn etenemisviivearvoja numeeriseen sääennustemalliin sen tosiaikaisen suorituskvyn parantamiseksi. Numeeriset sääennustemallit kuvaavat ilmakehän käyttäytymistä fysikaalisilla malliyhtälöillä kolmiulotteisella hilalla ajan funktiona. Tätä asiaa tutkitaan aktiivisesti.

Tekniikan kehityksen nykytaso on, että tukiasemaverkon avulla tapahtuva RTK-paikannus on yhtä tarkkaa kuin yhden tukiaseman avulla tapahtuva RTK-paikannus tukiaseman lähellä, edellyttäen, että tukiasemien väliset etäisyydet ovat korkeintaan noin 80 km. Paikannuksen laatu säilyy myös jonkin matkaa verkon peittoalueen ulkopuolella. Rajoittava tekijä on ilmakehä.

³Itse asiassa GPS-järjestelmän navigointiviesti sisältää sellaisen mallin, Klobucharin mallin, kahdeksalla parametrilla.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä on kokonaistuntemattomien ongelma? Kuvaile lähestymistapoja sen ratkaisemiseksi.
 - 2) Mitä hyötyä on kaksoiserotusten käytöstä kokonaistuntemattomien ratkaisemisessa?
 - 3) Mitä etua tarjoaa **RTK**-tukiasemaverkkojen käyttö, niin sanottu verkko-**RTK**?
 - 4) Mitä menetelmiä on olemassa tukiasemaverkon korjausten interpoloimiseksi käyttäjän sijaintiin?
 - 5) Miksi tukiasemien välinen korjausten lineaarinen interpolointi toimii hyvin satelliittien ratavirheiden tapauksessa, mutta heikommin ilmakehän etenemisviiveiden suhteen?
 - 6) Mikä on virtuaalitukiasema?
 - 7) Mitä hyötyä *käyttäjälle* on **VRS**-interpolointimenetelmän käytöstä?
 - 8) Kuinka **MAX**-interpolointimenetelmässä minimoidaan liikkuvaan vastaanottimeen siirrettävän tietomäärän koko?
 - 9) Kuvaile **LAMBDA**-menetelmän käyttöä kokonaistuntemattomien ratkaisemiseksi.
 - 10) Miksi numeeristen sääennustemallien (**NWP**) käytöstä olisi hyötyä ilmakehän vesihöyrypitoisuuden seurannan yhteydessä **GNSS**:llä?
- Vihje** Mallit kuvaavat ilmakehän suuret kolmiulotteisen paikan _____ ja ajan funktioina.



Harjoitus 9 – 1: Eron varianssifunktio

Jos zenitiin etenemisviiveen kovarianssifunktio \underline{d}^\perp kahden paikan 1 ja 2 välillä on annettu yhtälöllä **9.13**:

$$\text{Cov}\{\underline{d}^\perp(\varphi_1, \lambda_1), \underline{d}^\perp(\varphi_2, \lambda_2)\} = C_0 \exp(-\psi/\psi_0),$$

johda kahden paikan 1 ja 2 välisen zenitiin etenemisviiveiden erosuureen

$$\Delta_{12}\underline{d}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \underline{d}_2^\perp - \underline{d}_1^\perp = \underline{d}^\perp(\varphi_2, \lambda_2) - \underline{d}^\perp(\varphi_1, \lambda_1)$$

varienssifunktio. Funktio on muotoa

$$f(\psi) = \text{Var}\{\Delta_{12}\underline{d}^\perp(\psi)\}.$$

Piirrä sen kuvaaja olettaen, että $C_0 = \psi_0 = 1$.





Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät

10

Etenkin ilmailussa navigointitarkoituksiin ei ole hyväksyttävää käyttää **GPS**-järjestelmää ainoana menetelmänä, koska se ei takaa saatavuutta tai oikeellisuutta. Tämä seikka tunnetaan *eheysongelmana*.

Ongelman ratkaisussa käytetään satelliittipohjaisia parannusjärjestelmiä (**SBAS**). Toimivia **SBAS**-järjestelmiä on Pohjois-Amerikassa (**WAAS**), Euroopassa (**EGNOS**), Japanissa (**MSAS** ja **QZSS**, jälkimmäinen on hybridi parannus- ja paikannusjärjestelmä) ja Intiassa (**GAGAN**). Myös Venäjä (**SDCM**), Kiina (**BDSBAS**) ja Korean tasavalta (**KASS**) harkitsevat tai jo toteuttavat kansainvälisen ilmailustandardin mukaisten järjestelmien käyttöönottoa.

SBAS ei tarjoa **GPS**-järjestelmän käyttäjille vain eheyden takeita, vaan säästää myös rahaa korvaamalla perinteisen radionavigoinnin ja mittarilaskun lentokenttäalueen tukilaitteistot, jotka ovat massiivisia¹. **SBAS**in ansiosta pienemmilläkin lentokentillä voi olla säännöllistä lentoliikennettä. Lisäksi säästetään polttoainetta, koska **GPS/SBAS**:n avulla voidaan lentää suoraan eli geodeettista viivaa pitkin kentältä kentälle, ei monikulmiojonon kautta radiomajakoiden yli.



10.1 Vastaanottimen itsenäinen eheyden seuranta

Eräs vaatimattomampi lähestymistapa eheyden turvaamiseksi ilmailussa on vastaanottimen itsenäinen eheyden valvonta eli *receiver autonomous integrity monitoring* (**RAIM**). Siinä hyödynnetään **GPS**-järjestelmän redundanssia yhden tai usemman **GPS**-satelliitin signaalin mahdollisen epäluotettavuuden havaitsemiseksi ([Wikipedia, Receiver autonomous integrity monitoring](#)). Tekniikka on samanlainen kuin geodeettisten

¹Esimerkiksi **VOR**-majakka (**VHF Omnidirectional Range**, **VHF**-monisuuntamajakka) on läpimitaltaan 13 m!

verkkojen kestävyys arvioiminen sen suhteen, kuinka helposti karkeat virheet ovat havaittavissa. Käsite tunnetaan *luotettavuutena* (Baarda, 1968).

Kahteen kysymykseen on vastattava hetkellä millä hyvänsä:

- 1) Lähettääkö jokin käyttämästäni satelliiteista epäluotettavan signaalin?
- 2) Jos lähettäisi, voisinko edes tunnistaa sen?

Vastaus ensimmäiseen kysymykseen saadaan tilastollisesta testauksesta ja vastauksen toiseen luotettavuuden arvioinnilla.

Käytettävä havaintoyhtälö on se, jota käytetään aseman paikan määrittämiseen pseudoetäisyshavainnoista, yhtälö 8.10:

$$\Delta \underline{p} = H \underline{x} + \underline{m},$$

mutta kirjoitettu estimaatoyhtälönä (alaosio 2.4.1):

$$\Delta \underline{p} + \underline{v} = H \hat{\underline{x}},$$

jossa \underline{v} on jäännösvirhe.

Kaikille näkyville satelliiteille yhdessä tämä on

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A \hat{\underline{x}},$$

jossa

$$\underline{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_n \end{bmatrix}, \quad \underline{v} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}.$$

Tämän tavallisen pienimmän neliösumman ratkaisu on

$$\hat{\underline{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{\ell},$$

ja jäännösvirheet ovat

$$\underline{v} = A \hat{\underline{x}} - \underline{\ell}.$$

Ilmailun RAIMin tapauksessa käytettävä testisuure on pienimmän neliösumman ratkaisun jäännösten neliöiden summa:

$$\underline{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n v_i^2 = \underline{v}^T \underline{v}, \quad (10.1)$$



jossa v_i ovat jäännösvirheet ja n on satelliittien lukumäärä.

Tavallisessa pienimmän neliösumman menetelmässä oletetaan, että havaitut pseudoetäisyydet ovat normaalisti jakautuneita ja korreloimattomia ja että kaikilla on sama epävarmuus eli keskivirhe σ . Tätä kutsutaan *i.i.d.*-ominaisuudeksi. Silloin suure $\underline{\varepsilon}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon/\sigma^2$ on jakautunut jakauman χ^2_{n-4} (khii-toiseen) mukaan. Tässä $n - 4$ on vapausasteiden lukumäärä, kun tuntemattomia on neljä: vastaanottimen kolme koordinaattia ja sen kellotuntematon.

Ensimmäinen sääntö on, että ”väärän hälytyksen” todennäköisyys, *probability of false alarm* (PFA), kun satelliittien toimintahäiriöitä ei ole, toisin sanoen ensimmäisen lajin virhe, ei saa olla suurempi kuin $1/15\,000$, mikä antaa testin merkitsevyystasoksi $\alpha = 1 - 1/15\,000 = 99,9933 \dots \%$. χ^2 -jakauma nollahypoteesin tapauksessa antaa kynnsarvon, joka riippuu vapausasteiden lukumäärästä. Katso taulukko 10.1.

Toinen testauksessa asetettava parametri on todennäköisyys sille, että karkea virhe yhdessä pseudoetäisyydessä havaitaan. Tätä arvoa kutsutaan testin *erotuskyvyksi*. Valitaan $\beta = 99,9 \%$. Tämä merkitsee, että toisen lajin virheen eli oikeasti tapahtuvan toimintahäiriön huomaamatta jäämisen todennäköisyys eli ”*probability of missed detection*” (PMD) on $1 - \beta = 0,1 \%$.

RAIMia ei saa käyttää, jos satelliittien geometria on sellainen, että asetetulla arvolla α ja todennäköisyydellä β havaittavissa oleva karkea virhe yhdessä pseudoetäisyydessä aiheuttaisi esimerkiksi vaakasijainnissa virheen, joka ylittää asetetun ”hälytysrajan”. Vaatimus tunnetaan nimellä *ulkoinen luotettavuus*, tässä tapauksessa vaakasijainnin ulkoinen luotettavuus.

Huomaa, että luotettavuus on *satelliittigeometrian* ominaisuus ilman yhteyttä mihinkään oikeasti tehtyihin mittauksiin! Luotettavuus voidaan laskea ennen lentoa. Tämä ominaisuus on yhteinen DOPin, tarkkuuden laimennuksen, kanssa, joka on tunnettu GNSS-paikannuksen suure. DOP liittyy kuitenkin GNSS-sijaintiratkaisun tarkkuuteen. Sekin on suunnittelutyökalu.

Lennon eri vaiheille on olemassa eri hälytysrajat: tietyssä tilanteessa RAIM voi olla käyttökelpoinen risteilylennossa, muttei lähestymisessä.

On selvää, että redundanssin on oltava riittävä, jotta tämä toimisi. Neljä satelliittia on minimi, jotta paikannus onnistuisi koodipohjaisilla pseudoetäisyyksillä, mutta se ei vielä tarjoa redundanssia. Geodesian nyrkkisäännön mukaan redundanssin tulisi olla vähintään 50 %,





TAULUKKO 10.1. χ^2 -testirajat arvolle $\alpha = 1 - 1/15\,000$ ja eri vapausasteiden määrittelylle. Nämä ovat raja-arvot, joita vastaan suure $\underline{\varepsilon}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\varepsilon}/\sigma^2$ laskettuna yhtälöllä 10.1 pienimmän neliösumman ratkaisun jäännösvirheistä *lennon aikana* testataan.

Satelliittien lukumäärä	Vapausasteet	χ^2 -raja suurelle $\underline{\varepsilon}_1$
5	1	15,90
6	2	19,23
7	3	21,95
8	4	24,39
9	5	26,65
10	6	28,79
11	7	30,83
12	8	32,81

mikä merkitsisi kuutta satelliittia lentokoneen taivaalla. Tämä saavutetaan suurimmassa osassa ajasta jo minimaalisen 24 satelliitin GPS-konstellation avulla.

Mutta kyse ei ole pelkästään satelliittien lukumäärästä. Niiden on oltava taivaalla hyvin jaettuina, jotta tavoiteltuotettavuustaso oikeasti saavutetaan. Internetissä on interaktiivisia suunnittelutyökaluja, joiden avulla voi ennustaa, missä ja milloin RAIM on oikeasti käyttökelpoinen.

Nykyinen suurempi GPS-konstellatio ja kaikki muut toimivat GNSS-järjestelmät auttavat tekemään tästä houkuttelevan vaihtoehdon. Aihe on aktiivisen tutkimuksen kohteena: mainittakoon ARAIM, edistynyt RAIM, joka perustuu esimerkiksi Galileon ja GPS:n yhteiskäyttöön kaksitaajuusvastaanottimessa (L1 ja L5) (GLAD).

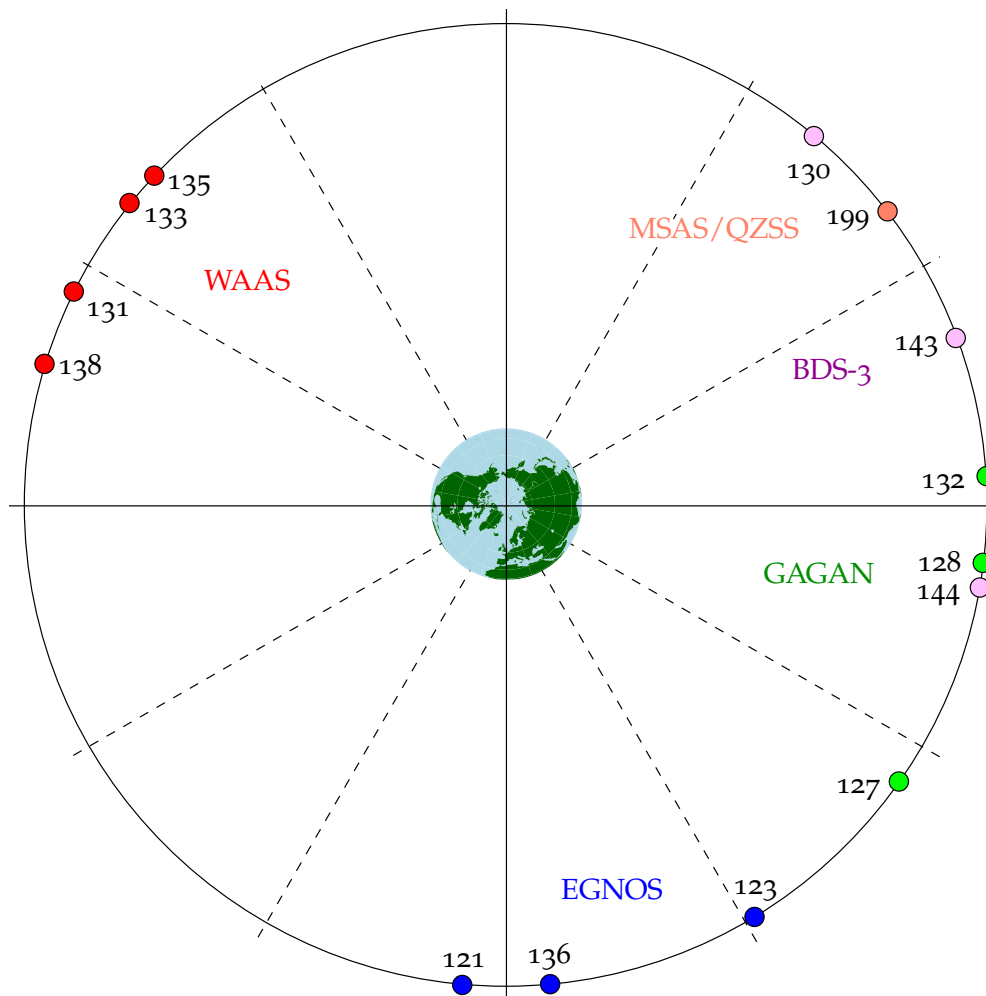


10.2 SBAS-teknologian kuvaus

Jokainen SBAS-järjestelmä rakennetaan tiettyä kohdealuetta varten — esimerkiksi WAAS rakennettiin Pohjois-Amerikalle. Kohdealueella pitää olla toimiva tukiasemien verkko, joka varmistaa tosiasassa, että jokainen alueella näkyvä GPS-satelliitti toimii oikein. Käyttäjät vastaanottavat palvelun tietoja geostationaarisella satelliitilla olevan transponderin kautta.

Palvelu antaa eheystiedon lisäksi differentiaalikorjauksia GPS-satelliittien pseudoetäisyysmittauksiin. Nämä korjaukset pätevät kohdealueen sisällä.





KUVA 10.1. SBAS-transpondereiden geometria. Tilanne vuonna 2020. Luvut viittaavat L1-taajuuden näennäissatunnaiskoodeihin (PRN). Taajuudella L5 käytetään vastaavia koodeja.

Periaatteessa differentiaalikorjausten määrittämiseksi alueella riittäisi neljä asemaa, kolme alueen nurkissa ja yksi keskellä, jos ainoat epä-tarkkojen pseudoetäisyyksien syyt olisivat satelliittikellot ja satelliittien lähettämät ratatiedot eli *broadcast ephemeris*. Käytännössä ilmakehän vaikutuksen sisällyttäminen korjauksiin edellyttää, että alue peitetään tiheämmin. Ja tietysti ylimääräisyys on aina hyväksi.

SBAS-satelliitti tai pikemminkin yleiskäyttöisen geostationaarisen satelliitin SBAS-transponderi lähettää signaalin, joka on samanlainen kuin GPS:n L1-signaali. Kantoaallon taajuus on 1545,42 MHz, ja se on binaarisesti vaihemoduloitu näennäissatunnaisella koodilla eli 1023-bittisellä Goldin koodilla bittitaajuudella 1,023 MHz, aivan kuten GPS:n C/A-koodi. Tämä merkitsee, että vain hieman modifioitu GPS-vastaanotin

osaa käyttää signaalia.

Toisin kuin **GPS**:n navigointiviesti, joka lähetetään bittinopeudella 50 Hz, **SBAS**-viesti lähetetään nopeudella 250 Hz. Yhden viestin pituus on 250 bittiä, ja sen lähettäminen vie sekunnin. Kaikkien tarvittavien tietojen lähettäminen jakautuu useille viesteille. Tiedot luokitellaan ”nopeiksi” tai ”hitaiksi” sallitusta vasteajasta riippuen. Esimerkiksi osa kellokorjauksista on ”nopeita”, kun taas ionosfäärin korjaus on kookas, mutta vain hitaasti muuttuva.

SBAS-signaali tarjoaa seuraavat tiedot:

- Näennäissatunnainen koodi, jonka avulla transponderi tunnistautuu käyttäen **SBAS**in käyttöön varattua Goldin koodia². Koodeja voitaisiin käyttää pseudoetäisyyden mittaukseen, mutta ne tarjoavat **GPS**:ään verrattuna vain vähän lisäarvoa.
- Differentiaalikorjauksia. **SBAS**-kykyinen **GNSS**-vastaanotin vastaanottaa satelliittien kiertoratojen ja kellojen korjauksia sekä ionosfäärin vaikutuksen korjauksia. Koska monet **SBAS**-vastaanottimet ovat yksitaajuisia (vain L1), on ionosfäärin aiheuttama etenemisviive hyvin merkittävä — metreistä kymmeniin metreihin. Korjauksen on oltava tarkka ja sen spatiaalisen erotuskyvyn riittävä.
- Eheystietoa.

Ratakorjaukset ovat pitkäaikaisia ja hitaasti muuttuvia, ja ne lähetetään korjauksina *broadcast ephemeris* -ratatiedoista laskettuihin satelliittien suorakulmaisiin geosentrisiin paikkoihin ja nopeuksiin. Korjauskaava on

$$\mathbf{x}_{\text{korj}}(t) = \mathbf{x}_{\text{be}}(t) + \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} (t - t_0),$$

jossa t_0 on sekä *broadcast ephemeris*in että korjausviestin *issue of data (IOD)* -aika.

GPS-satelliittien kellokorjaukset koostuvat kahdesta osasta:

- hidas osa, joka lähetetään alhaisella nopeudella kellon poikkeaman ja käynnin korjauksina
- nopea osa, joka muuttuu nopeasti ajassa.

Ionosfäärin etenemisviive, joka muuttuu hitaasti, on sama kaikille

²Yhdysvaltojen ilmavoimat on maailmanlaajuinen koodinumeroiden osoittamisen koordinaattori. Koodinumerot koskevat taajuuksia L1 ja L5.





TAULUKKO 10.2. Eri lähestymiskategoriat ICAO:n mukaan. Kategoria kuvaa, kuinka hyvin lentokone ja kenttä on varustettu mittarilaskua varten. SBAS-lähestyminen on mahdollista vain osalle kategorioista.

Kategoria	Ratkaisukorkeus (DH)	Näkyvyys	Näkyvyys kiitoradalla (RVR)
Cat I	200 ft = 60 m	≥ 800 m = 2600 ft, tai	≥ 550 m = 1800 ft
Cat II	100–200 ft = 30–60 m	-	≥ 350 m = 1200 ft
Cat III A	< 100 ft = 30 m / ei ole	-	≥ 200 m = 700 ft
Cat III B	< 50 ft = 15 m / ei ole	-	50–200 m = 150–700 ft
Cat III C	ei ole	-	ei ole

GPS-satelliiteille, mutta se riippuu käyttäjän sijainnista. Se lähetetään hilan muodossa, joka peittää sen voimassaoloalueen eli laskennassa käytettyjen tukiasemien alueen. Lähetetyt arvot antavat vaikutuksen suuruuden zeniitissä olevan satelliitin tapauksessa. Käyttäjä interpoloi vaikutuksen hilasta kunkin satelliittisignaalin ionosfääriseen lävistyskohtaan ja ottaa huomioon lävistyskulman.

SBASin viestin sisällön laaja esitys on [Sánchez ja Berges \(2006\)](#).




10.3 Eheys ja *safety of life*

Integriteetin eli *eheyden seuranta* merkitsee, että käyttäjiä varoitetaan asetetun aikarajan — esimerkiksi kuuden sekunnin — sisällä, jos GPS-satelliitin paikannussignaali ylittää asetetun toleranssiarvon. *Safety-of-life* -sovelluksissa tämä on pakollista. *Safety of life* (SoL) tarkoittaa, että jos järjestelmä ei toimi oikein, ihmisiä voi kuolla.

Hyvä esimerkki tästä on lähestyminen ja laskeutuminen lentokentälle. Jos laskeudutaan sumussa GPS-navigoinnin avulla ja korkeusarvo on monta metriä pielessä, ilman varoitusta tapahtuu onnettomuus. Jos GPS-korkeuteen ei ole luottamista sumussa tai pilvessä ja lentäjä saa tästä varoituksen, laskua ei yritetä. Jos taas eheysjärjestelmän takaama tarkkuus on muutaman metrin sisällä eikä sumua ole, lentäjä voi suorittaa matalan pilvipeitteen läpi näkölaskun, vaikkapa 200 jalasta alaspäin.

Eheys mahdollistaa ilmailussa operaatiot, jotka olisivat yksin GPS:n avulla liian riskialttiita. GPS on ollut sellaisenaan jo käytössä RAIM-moodissa (vastaanottimen itsenäinen eheyden valvonta eli *receiver autonomous integrity monitoring*), mutta vain reittilentojen suorissa osissa, ei



 TAULUKKO 10.3. Satelliitit, joilla on **WAAS**-transponderi, tilanne 2020. **PRN** on näennäissatunnuskoodi, samanlainen kuin **GPS**-satelliiteilla.

Satelliitti	PRN	Pituusaste	Laukaisu	Loppu
Inmarsat-3 F3	134	178° E	17. joulukuuta 1996	Syyskuu 2007
Inmarsat-3 F4	122	142° W	3. kesäkuuta 1997	Syyskuu 2008
Telesat Anik F1R	138	107°3 W	21. marraskuuta 2000	-
Intelsat Galaxy 15	135	133° W	13. lokakuuta 2005	-
Inmarsat-4 F3	133	117° W	18. elokuuta 2008	Marraskuu 2017
Eutelsat 117 WB	131	117° W	14. kesäkuuta 2016 ^a	-
SES-15	133	129° W	18. toukokuuta 2017	-

^aToimiva maaliskuusta 2018 lähtien.

laskuvaiheessa. Vaatimuksena on, että korkeintaan *kuusi sekuntia* sen jälkeen, kun **GPS**-satelliitin signaali menee epäluotettavaksi, lentäjää hälytetään.

10.4 WAAS

WAAS (Wide Area Augmentation System) julistettiin toimivaksi vuonna 2003. Järjestelmä seuraa **GPS**-järjestelmän lähetyksiä, laskee differentiaalikorjaukset käyttäjille ja antaa todennetun *eheystason*. Tarkkuus differentiaalikorjausten jälkeen on luokkaa ± 2 m. Toiset lähteet antavat 1–2 m vaakatasossa ja 2–3 m pystysuunnassa palvelualueen sisällä. Ilman **WAASia** **GPS**-paikannuksen tarkkuus olisi keskimäärin vain ± 15 m yhden taajuuden **GPS**-vastaanottimen avulla, lähinnä ionosfäärin takia.

Vuodesta 2007 lähtien **WAAS** on hyväksytty ohjaamaan lentokoneen laskeutumista turvallisesti 200 jalan korkeuteen lentokentän yläpuolella: **ICAO** Category I, taulukko 10.2.

Vuonna 2014 Pohjois-Amerikassa jo 73 000 lentokonetta oli varustettu **WAAS**-vastaanottimella (**NASA Spinoff**).

WAAS on käytössä myös ilmailun ulkopuolella, esimerkiksi merenkulussa.

10.4.1 WAASin avaruuslohko

WAAS-transpondereita kantavista satelliiteista ja niiden historiasta kertoo taulukko 10.3, joka perustuu julkisiin lähteisiin.



TAULUKKO 10.4. Satelliitit, joilla on **EGNOS**-transponderi, tilanne vuonna 2020. **PRN** on L1-lähetyksen näennäissatunnuskoodin numero. Tällä hetkellä toimivat **EGNOS**-satelliitit lähettävät myös taajuudella L5.

Satelliitti	PRN	Pituusaste	Laukaisu	Loppu
Inmarsat-3 F1	131	64°5 E	3. huhtikuuta 1996	Loppunut
Inmarsat-3 F2	120	15°5 W	6. syyskuuta 1996	1. tammikuuta 2019
Artemis	124	21°5 E	12. heinäkuuta 2001	2015
Inmarsat 4-F2	126	64°0 E	8. marraskuuta 2005	Loppunut
Astra SES-5	136	5°0 E	9. heinäkuuta 2012	-
Astra 5B	123	31°5 E	23. maaliskuuta 2014	-
Eutelsat 5WB	121	5°0 W	9. lokakuuta 2019	-

Geostationaarisen satelliitin signaali on koodattu samalla tavalla käyttäen näennäissatunnuskoodia (**PRN**) kuin **GPS**-satelliittien signaalit. **WAAS**-satelliitteilla on omat koodit, jotka eroavat toisistaan ja **GPS**-satelliittien koodista, ja vastaanottimen korrelaattori erottaa satelliitit toisistaan niiden avulla.



10.4.2 WAASin maalohko

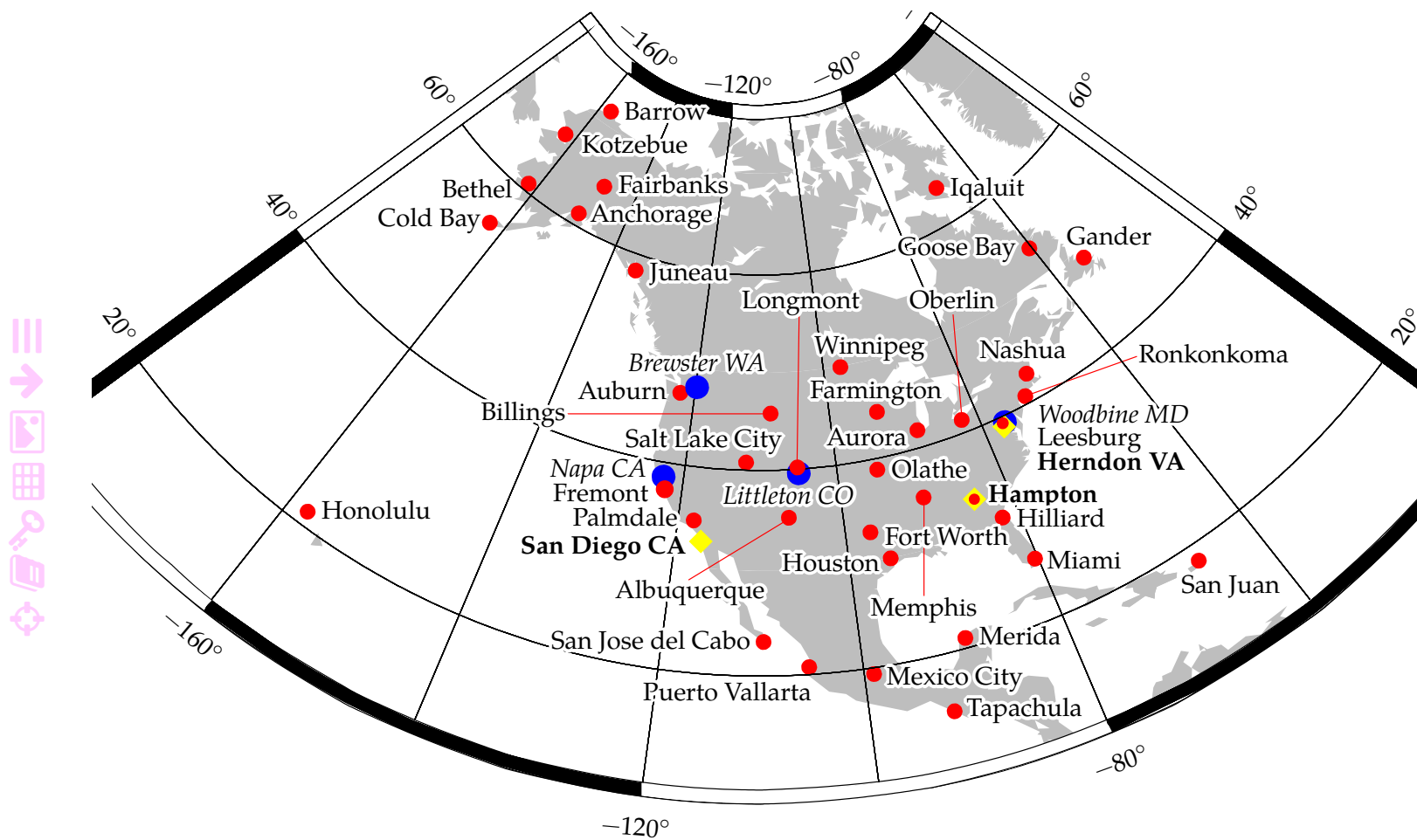
WAAS-järjestelmä käyttää seuraavia tukiasemia Yhdysvalloissa ja naapurimaissa:

- 1) **WRS** (Wide Area Reference Stations): 38 Pohjois-Amerikassa, mukaan lukien 7 Alaskassa, 1 Havajilla ja 1 Puerto Ricossa. Tämä on myös alue, jonka sisällä annetut korjaukset ovat tarkkoja.
- 2) Kolme **WMS**-tukiasemaa (Wide Area Master Stations). Näissä lasketaan korjaukset ja eheystieto. Differentiaalikorjaukset lasketaan alueen peittävän hilan solmupisteille.
- 3) Neljä **GUS**-tukiasemaa (Ground Uplink Stations). Näissä korjausviesti kootaan ja lähetetään geostationaarisen satelliitin transponderiin, joka välittää viestin käyttäjille samoilla taajuuksilla, joita myös **GPS**-satelliitit käyttävät: L1 ja uudemmissa satelliiteissa L5. Ne käyttävät samanlaisia yksilöitäviä näennäissatunnuskoodia kuin **GPS**-satelliitit.

GUS-asemilla on isot paraabeliantennit lähettämistä varten. Asemia on kaksi jokaista kohdealuetta palvelevaa transponderia kohti.

Tietoliikenneyhteydet asemien välillä ovat varta vasten rakennettuja.





Kuva 10.2. WAASin maalohko, tilanne vuonna 2017. Punainen: WRS, keltainen: WMS, sininen: GUS. Huomaa asemat Kanadassa ja Meksikossa.

Avointa Internetiä ei ole hyväksytty luotettavasti tosiaikaiseksi.



10.5 EGNOS

EGNOS, European Geostationary Navigation Overlay Service, on Euroopan komission, **ESAn** ja yhteiseurooppalaisen ilmailuturvallisuuden laitoksen Eurocontrolin yhteinen hanke.

EGNOS on yhteensopiva ja yhteentoimiva **WAASin** kanssa. **EGNOS** aloitti toimintansa heinäkuussa 2005.

EGNOS koostuu neljästä toiminnallisesta lohkoista eli segmentistä: maalohko, tukilohko, avaruuslohko ja käyttäjälohko.

EGNOSin maalohko koostuu seuraavista komponenteista:

- 1) **RIMS** (Ranging and Integrity Monitoring Stations): 40. Ne vastaanottavat signaalin ja välittävät tiedot **MCC**-keskuksiin.
- 2) **MCC** (Master Control Centres): 2, josta toinen Ciampinossa (Italia) ja toinen Torrejonissa (Espanja). Ne vastaanottavat tiedot **RIMS**eiltä ja laskevat niistä korjauksia ja eheystietoja, jotka lähetetään eteenpäin.
- 3) **NLES** (Navigation Land Earth Stations): 6. Ne lähettävät tiedot eteenpäin eri geostationaariin transpondereihin.

WAASin tapaan myös **EGNOSin** maa-asemien väliset tietoliikenneyhteydet ovat varta vasten rakennettuja.



10.6 Japanin SBAS-järjestelmät



10.6.1 MSAS

MSAS (MTSAT Satellite-based Augmentation System) oli ensimmäinen Japanilainen **SBAS**. Se suunniteltiin yhteensopivaksi **WAASin** ja **EGNOSin** kanssa. Järjestelmä aloitti toimintansa syyskuussa 2007. Taulukko 10.5 kuvaa avaruuslohkon.

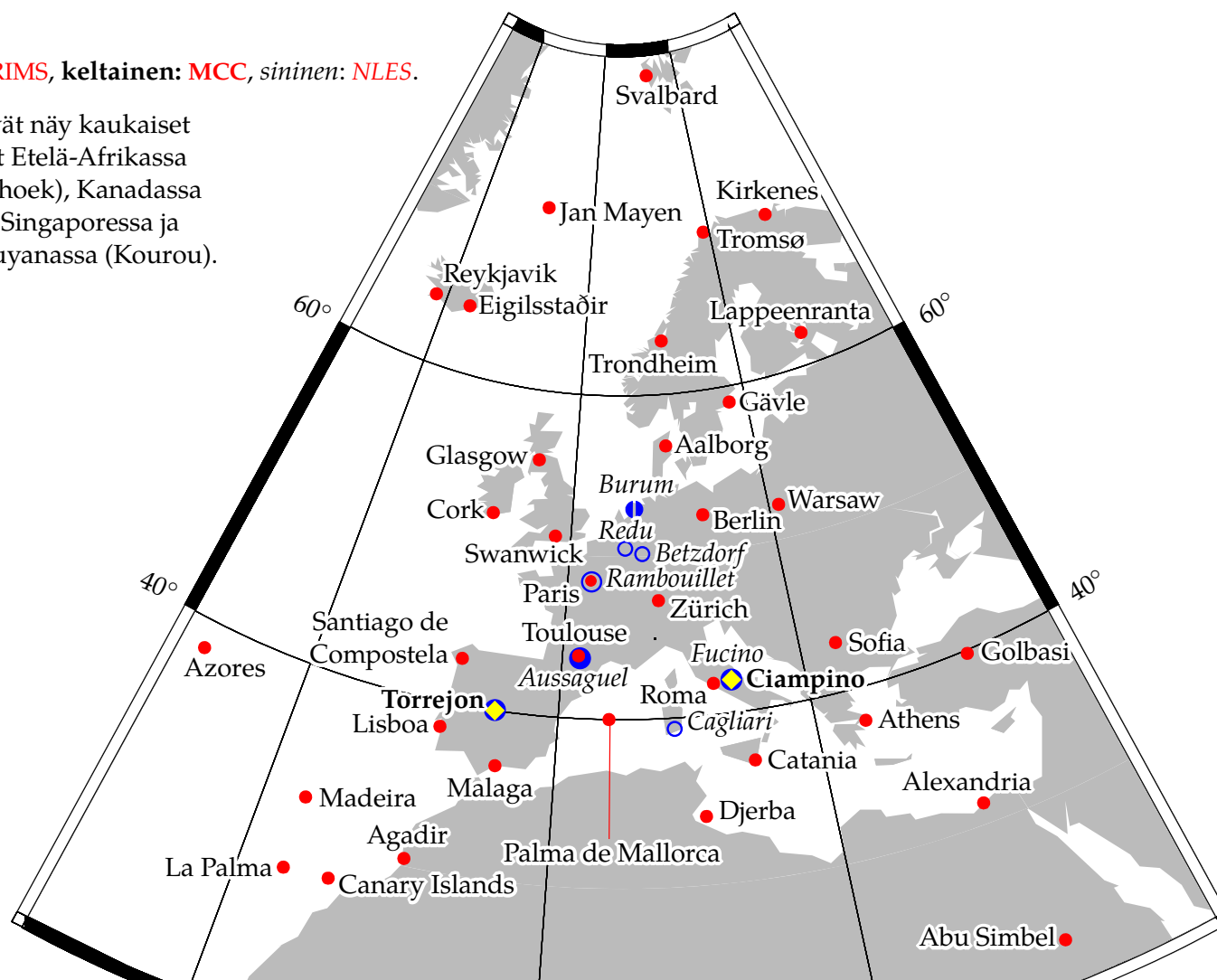
MTSAT-1R-satelliitin käytöstä poiston jälkeen vuonna 2015 MTSAT-2, joka oli siihen saakka lähettänyt vain **PRN**-luvun 137 mukaista signaalia, jatkoi **PRN**-lukujen sekä 129:n että 137:n lähettämistä. Huhtikuussa 2020 geostationaarinen satelliitti **QZSS-3** alkoi lähettää **PRN**-luvun 199 mukaista signaalia.

MSAS:llä on kuusi seuranta-asemaa. Katso **Office of Aeronautical Satellite Systems, ATS Engineering Division, Japan Civil Aviation Bureau (2008)** ja kuva 10.4.



Punainen: **RIMS**, keltainen: **MCC**, sininen: **NLES**.

Kuvassa eivät näy kaukaiset maa-asemat Etelä-Afrikassa (Hartebeesthoek), Kanadassa (Montreal), Singaporessa ja Ranskan Guyanassa (Kourou).



Kuva 10.3. EGNOSin maalohko, tilanne 2019. Punainen: **RIMS**, keltainen: **MCC**, sininen: **NLES**.



TAULUKKO 10.5. Satelliitit, joilla on **MSAS**-transponderi. MTSAT-satelliitit olivat sääsatelliitteja, joissa **SBAS**-transponderi oli vain pieni osa hyötykuormasta. **PRN** on lähetyksen näennäissatunnuskoodin numero.

Satelliitti	PRN	Pituusaste	Laukaisu	Loppu
MTSAT-1R (Himawari 6)	129	140°E	26. helmikuuta 2005	Joulukuu 2015
MTSAT-2 (Himawari 7)	137, 129	145°E	18. helmikuuta 2006	Toukokuu 2020
QSZZ-3	199	127°E	19. elokuuta 2017 ^a	-

^aToimiva huhtikuusta 2020 lähtien.

MSAS-järjestelmää kutsutaan myös nimellä **MSAS** V1. Vuonna 2020 sen korvaa **MSAS** V2 eli **QZSS**.



10.6.2 QZSS

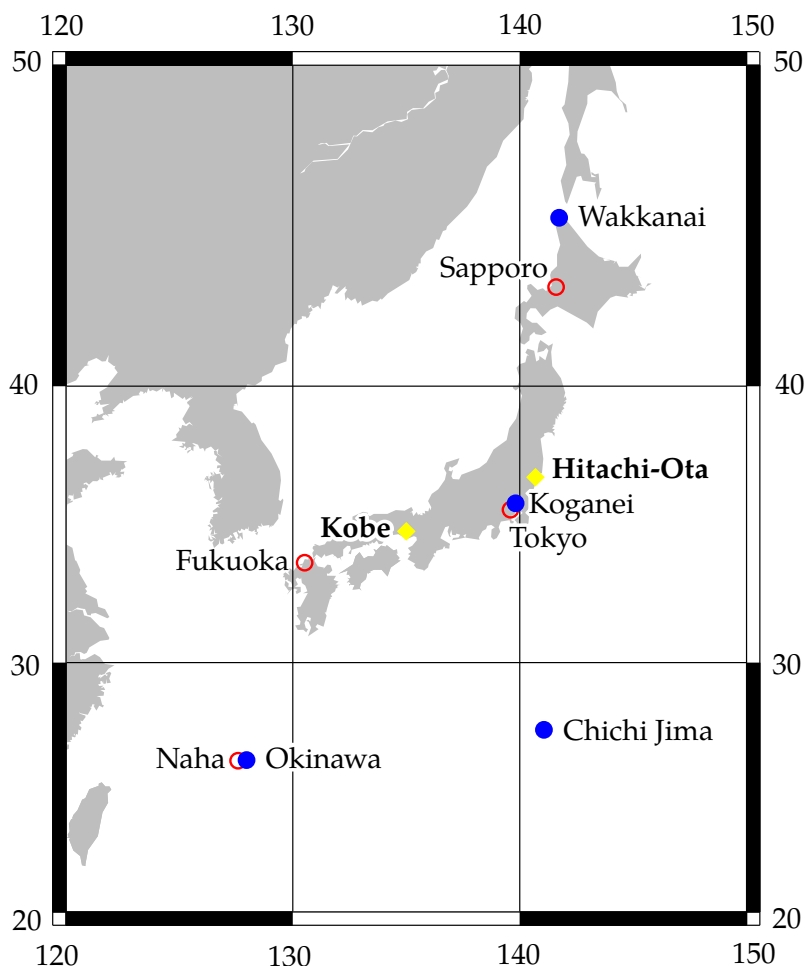
Japanin avaruusjärjestö **JAXA** (Japanese Aerospace Exploration Agency) on rakentanut järjestelmän nimeltä **QZSS**, Quasi-Zenith Satellite System, kutsumanimi *Michibiki* — ”opastus”. Se toimii **GPS**:ää tukevana järjestelmänä, joka käyttää signaalirakennetta, joka on yhteensopiva ja yhteentoimiva **GPS**:n kanssa. Toisin kuin muut **SBAS**-järjestelmät, se ei tarjoa vain **GPS**-paikannuksen parannuspalvelua, vaan myös omia paikannussignaaleja, jotka on tarkoitettu käytettäväksi yhdessä **GPS**:n vastaavien kanssa.

Satelliittiradat ovat geosynkroonisia eli yhden tähtivuorokauden ratoja. Ratatasojen kaltevuus- eli inkлинаatiokulma on korkea, noin 45°–53°, ja radat ovat melko pyöreitä: radan eksentrisyys on noin 0,07. Tarkoitus on, että millä hetkellä tahansa ainakin yksi satelliitti on roikkumassa Japanin taivaalla kohtuullisen korkealla elevaatiokulmalla. Satelliitti näkyy jopa Japanin suurkaupunkien ”kaupunkikanjoneissa”. Tästä nimitys ”*quasi-zenith*” on peräisin.

Se, että Japanissa on aina yksi satelliitti lähellä zeniittiä, vaatii kolme satelliittia radoilla, joiden nousevat solmut ovat samalla maantieteellisellä pituusasteella ja joiden rektaskensiot ovat 120° toisistaan. Satelliitit kulkevat solmujen läpi rataperiodinsa kolmasosa aikavälein, kuten jonglöörin keilat. Satelliitit kelpaavat myös, ja varsinkin, tietoliikennesatelliiteiksi.

Tämän tyyppiselle kiertoradalle viitataan usein nimellä ”Tundran





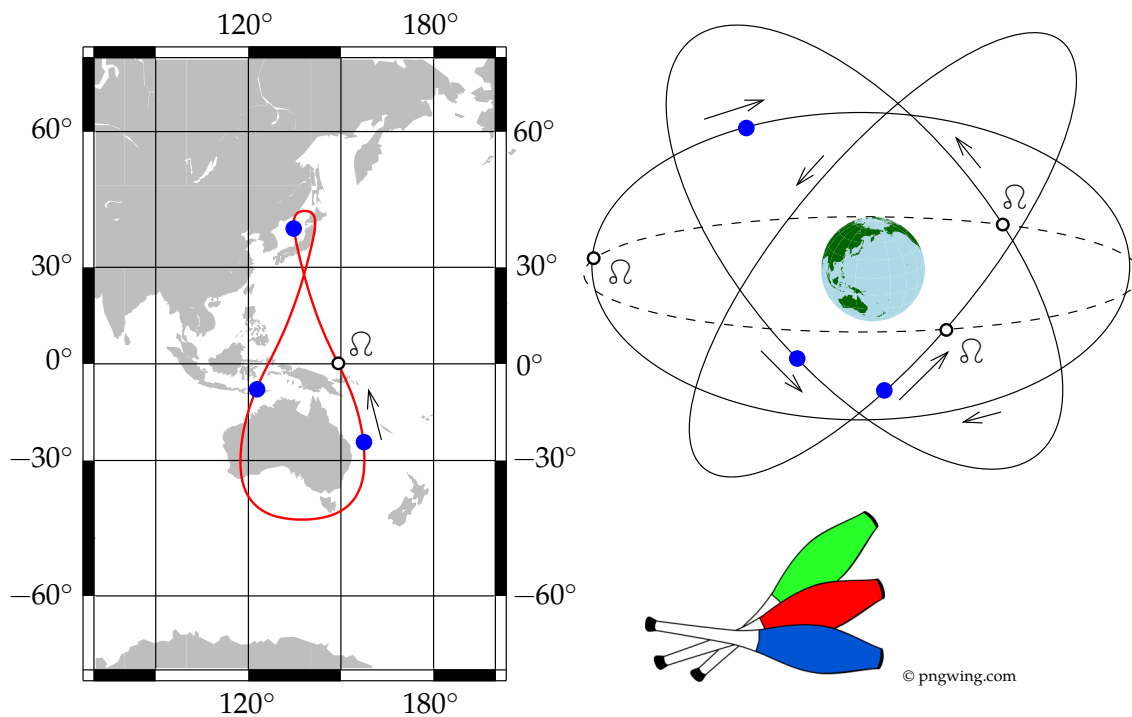
KUVA 10.4. MSASin ja QZSSin maalohkot, tilanne noin vuonna 2016. Keltainen: Master Control Station (MCS). Ground Monitor Station (GMS), punainen: MSAS, sininen: QZSS.
QZSS: Useita seuranta- ja ohjausasemia sekä Japanin ulkopuolella olevia valvonta-asemia ei ole piirretty.



kiertorata”. Se muistuttaa jonkin verran “Molnijan kiertorataa”, jota Neuvostoliiton Molnija-viestintäsatelliitit käyttivät ja jolla oli samanlainen “apogeumin roikunta” -toimintaidea korkeiden pohjoisten leveysasteiden palvelemiseksi. Molnijan kiertoradat ovat kuitenkin erittäin eksentrisiä, ja niiden rataperiodi on vain puoli tähtivuorokautta. Niiden ratatason kaltevuuskulma on $i = 63,4$, joka täyttää ehdon $5 \sin^2 i - 4 = 0$, jolloin rataellipsin prekessioliike ratatason sisällä — “apsidiprekessio” — häviää. Tämä merkitsee, että jos apogeum on kerran laitettu pohjoiseen — perigeumin argumentti $\omega = 270^\circ$ — se pysyy siellä.

Toisin kuin muut — geostationaariset — SBAS-järjestelmät, tarjoaa tämä järjestelmä *käyttökelpoisia* havaintosuureita, kuten pseudoetäi-





KUVA 10.5. **QZSS**-radan toimintaidea. Vasemmalla Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, oikealla inertiaalisessa koordinaatistossa.

syys ja kantoaallon vaihe. Se lähettää samoilla taajuuskaistoilla kuin **GNSS**-järjestelmät ja käyttää koodijakokanavointia (**CDMA**) omilla **PRN**-koodeilla, mikä minimoi mahdollisen häiriön.

QZSS-järjestelmän ensimmäinen satelliitti laukaistiin 11. syyskuuta 2010. Kolme lisää laukaistiin vuonna 2017, ja 1. marraskuuta 2018 järjestelmä julistettiin virallisesti käyttöön otetuksi. Laajentamista seitsemään satelliittiin suunnitellaan.

Kunnianhimoinen **QZSS**-järjestelmä kuvataan laajasti Euroopan avaruusjärjestön **ESAn** Navipedia-verkkosivulla (**GMV, 2011**). Järjestelmän suorituskykystandardi ja käyttöliittymän määrittely löytyvät täältä: **QZSS PS/IS**.

10.7 Intian GAGAN-järjestelmä

GAGAN, GPS-Aided Geo Augmented Navigation on Intian **SBAS**-järjestelmä, joka on tarkoitettu käytettäväksi ilmailussa Intian ilmailussa. Tällä hetkellä on käytössä kolme transponderia, katso taulukko 10.6.

INRES-asemia (Indian Reference Stations) on 15, ja kaikki ne sijaitsevat Intiassa. **INMCC**-asemia (Indian Mission Control Centres) on kaksi,

TAULUKKO 10.6. **GAGAN**-satelliitit.

Satellite	PRN	Pituusaste	Laukaisu
GSAT-8	127	55° E	21. toukokuuta 2011
GSAT-10	128	83° E	29. syyskuuta 2012
GSAT-15	132	93,5 E	10. marraskuuta 2015

Bangaloressa ja Delhissä, ja **INLUS**-asemia (Indian Navigation Link Upload Stations) on kolme.

Intian ilmatilassa vaihteleva ionosfäärin viive on erityinen ongelma, kun geomagneettinen ekvaattori kulkee maan läpi ja ekvatoriaalinen virtatihentymä ionosfäärissä sen yli. Ongelmaa käsitellään intialaisessa tutkimushankkeessa, jonka puitteissa on rakennettu 18 elektronien kokonaispitoisuuden (**TEC:n**) seuranta-asemaa kaikkialle Intiassa. Se on myös syy, miksi **GAGAN**-satelliitit lähettävät sekä L1- että L5-taajuudella.



10.8 Maapohjaiset parannusjärjestelmät

GBAS, *ground-based augmentation systems* eli maapohjaiset parannusjärjestelmät käyttävät paikallista **GPS**-tukiasemaa kolmen mailin etäisyydellä lentokentältä. Ne tuottavat differentiaalikorjauksia ja eheystietoja aivan samalla tavalla kuin **SBAS**. Tämä tukee navigointia, lähestymistä ja laskeutumista 20 mailin säteellä lentokenttää ympäröivässä ilmatilassa.

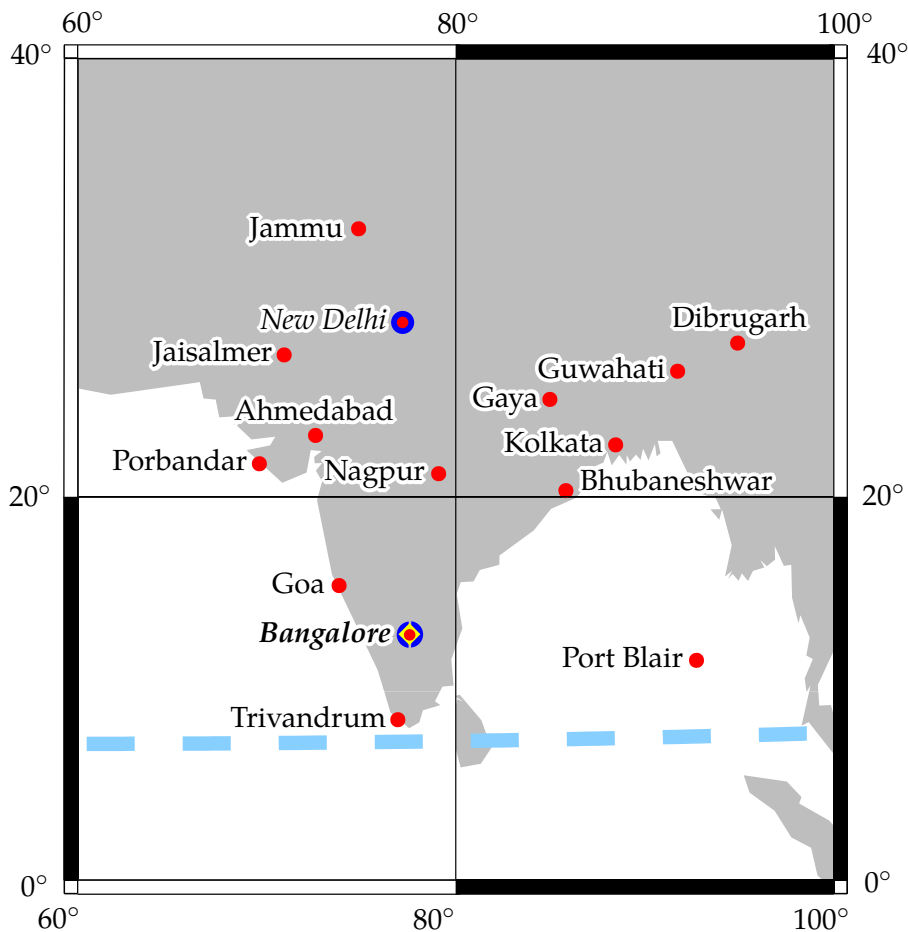
Alkuperäinen amerikkalainen toteutus on nimeltään **LAAS**, *local-area augmentation systems* eli paikalliset parannusjärjestelmät.

GBAS on tarkoitettu käytettäväksi mittarilaskuihin vilkkailla lentokentillä. Sen käyttö on hyväksytty **ICAO** CAT I -lähestymisille. Kategorioiden II ja III hyväksyntää on valmisteltu kauan.

Lentokentän **GPS**-tukiasema seuraa **GPS**-satelliitteja ja laskee differentiaalikorjauksia paikallisesti. **GPS**-paikannus onnistuu korjausten avulla tarkkuustasolla ± 1 m. Korjaukset lähetetään lentokoneille radioiteitse (**VHF**). Toisin kuin **SBAS** se siis vaatii lentokentältä erikoislaitteistoa. Yksi sellainen laitteisto korvaisi monia perinteisiä laitteistoja, kuten **VOR**-majakat jokaisella kiitoradalla.

GBASia voidaan käyttää myös ohjaamaan lentokentällä liikkuvia maakulkuneuvoja. Tämän merkitys turvallisuudelle on ilmeinen. **GBAS** siis estää lentokoneita ja maakulkuneuvoja olemasta paikoissa, joissa niiden ei pitäisi olla.





Kuva 10.6. GAGANin maalohko, tilanne vuonna 2017. Punainen: **INRES**, keltainen: **INMCC**, sininen: **INLUS**. Ekvatoriaalinen virtatihentymä on merkitty vaaleansinisellä katkoviivalla.

GBAS on toiminnassa monilla kansainvälisillä lentokentillä. Kuten **SBAS**illa, sillä voidaan korvata mittarilaskun maalaitteistoja, joita tarvitaan kaksi jokaista kiitorataa kohti. **GBAS** mahdollistaa joustavammat lähestymiset, jotka säästävät polttoainetta.



10.9 Internetpohjaiset parannusjärjestelmät

GDGPS, Global Differential GPS -järjestelmä (**Jet Propulsion Laboratory, The Global Differential GPS System**), on Jet Propulsion Laboratory **JPL**:n keksimä ja toteuttama. Järjestelmä perustuu maailmanlaajuiseen **JPL**:n omistamien asemien verkkoon ja tuottaa globaalisti käyttökelpoisia differentiaalikorjauksia. Osa asemista käyttää atomikelloja.

Korjaukset lähetetään Internetin kautta käyttäjälle **TCP**-protokollalla. Korjausten kokonaisvasteaika voi olla alle viisi sekuntia.



GDGPS-järjestelmälle on tarjolla yksinkertainen käyttöliittymä nimeltä **APPS**, Automatic Precise Positioning Service (**GDGPS APPS**). Käyttäjä lähettää **RINEX**-tiedostoja, ja tulokset esitetään verkkosivulla.

Järjestelmä esitetään tässä, koska se muistuttaa satelliittipohjaista parannusjärjestelmää. Sitä voitaisiin kutsua Internet-pohjaiseksi parannusjärjestelmäksi. Se oli aikanaan myös eräänlainen **WAAS**in prototyyppi (**NASA Spinoff**).

Samankaltainen ratkaisu, **SISNet**, on kehitetty **EGNOS**ille, joka lähettää geostationaarisilta satelliiteilta vastaanotettua avaruussignaalia suoraan käyttäjille Internetin välityksellä (**Chen ym., 2003**). Tämä on hyödyllistä etenkin korkeilla leveysasteilla sijaitsevista kaupungeista tai metsä-alueilla, joilla maanpinnalla liikkuvalla mobiilikäyttäjälle on haastavaa vastaanottaa keskeytymätöntä signaalia geostationaariselta satelliitilta.

SISNet on nykyään osa laajempaa palvelua **EDAS**, **EGNOS** Data Access Service, joka lähettää **EGNOS**in maalohkon havaintoja käyttäjälle käyttäen protokollia **RTCM** ja **NTRIP** (**EDAS; EDAS Service Definition Document**).



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Kuinka satelliittipohjainen parannusjärjestelmä (**SBAS**) toimii? Mitkä kaikki järjestelmät ovat maailmassa tällä hetkellä toiminnassa?
- 2) Mitä on **GPS**-signaalin *eheys*?
- 3) Mikä on **RAIM**, vastaanottimen itsenäinen eheyden valvonta, ja miten se toimii?
- 4) Kuinka tiedonsiirto **SBAS**-geostationaarisesta satelliitista käyttäjälle on optimoitu sekä tietomäärän että vasteajan suhteen?
- 5) Millä tavoin **SBAS**in käyttö **GPS**:n kanssa säästää rahaa ja polttoainetta?
- 6) Kuinka **QZSS**-järjestelmä toimii? Kuvaile erityisesti kiertoratojen valinta.
- 7) Mitä erityistä ongelmaa Maan magneettikenttä aiheuttaa **SBAS**ille Intian ilmatilassa?
- 8) Millä tavalla maapohjaiset parannusjärjestelmät (**GBAS**) eroavat satelliittipohjaisista (**SBAS**)?



Satelliittinavigoinnin uusi aikakausi

11

Uusia **GNSS**-järjestelmiä (*global navigation satellite systems*) on tulossa tai niitä on jo otettu käyttöön vakiintuneen **GPS:n** (*Global Position System*) lisäksi. Teknologiseen navigointiin sopivat järjestelmät esitellään tässä luvussa. Nykytilan yhteenveto löytyy taulusta **11.1**.



11.1 GPS-järjestelmän modernisointi

Elektroniikka-alan nopea kehitys on tehnyt mahdolliseksi ja jopa helppoksi asiat, jotka olivat **GPS:n** alkuaikoina mahdottomia. Hyvän esimerkin tästä antavat monitaajuusvastaanottimet, jotka olivat muinoin kalliita erikoislaitteita. **GPS:n** monopoli onkin murtunut. Miljoonien käyttäjien nykytarpeet ymmärretään nyt paremmin ja otetaan vakavasti. **GPS-järjestelmän** modernisointi on ollut tarpeellista.

Modernisoinnista on vastannut **Global Positioning Systems Directorate**. Tavoitteena on lisätä **GPS-järjestelmään** uusia ominaisuuksia, kuten uusia siviili- ja sotilassignaaleja, ja parantaa järjestelmän suorituskykyä.



11.1.1 Satelliittien sukupolvet

GPS-satelliittien peräkkäisiä teknologiasukupolvia kutsutaan *blokeiksi*.

Block I **GPS:n** perusajatuksen toimivuutta kokeiltiin 11 koesatelliitin sarjalla. Kymmenen satelliittia pääsi onnistuneesti kiertoradalle, ensimmäinen vuonna 1978.

Block II Ensimmäinen operatiivinen **GPS-satelliittimalli** oli Block II. Vuosina 1989–1990 laukaistiin yhdeksän satelliittia. Niistä yksikään ei ole enää toiminnassa: viimeinen poistettiin käytöstä vuonna 2007.

Block IIA Kirjain A merkitsee *advanced*. Tämän mallin 19 satelliittia



TAULU 11.1. Uusia globaaleja navigointisatelliittijärjestelmiä.

	GPS	GLONASS	Galileo	BeiDou
Ratatasoja	6	3	3	3
Tasojen välinen kulma	60°	120°	120°	120°
Satelliitteja tasossa	4	8	8	8
Satelliittien välinen kulma	90° ^a	45°	45°	45°
Satelliitteja yhteensä (virallisesti)	24 + 6	24 + 3	24 + 6	24 + 3 ^b
Radan korkeus (km)	20 200	19 140	23 222	21 528
Periodi	11 ^h 58 ^m	11 ^h 16 ^m	14 ^h 05 ^m	12 ^h 53 ^m
"Resonanssi" (kierroksia / tähtivuorokausia)	2/1	17/8	17/10	13/7
Ratatason kaltevuus	55°	64°,8	56°	55°
Kantoaallon taajuus (MHz)	GPS	GLONASS ^c	Galileo	BeiDou ^d
1600,995		L1		
1575,420	L1		E1	B1C
1561,098				B1I
1278,750			E6	
1268,520				B3I
1248,060		L2		
1227,600	L2			
1207,140			E5b	B2b
1202,025		L3		
1176,450	L5		E5a	B2a

^aVuodesta 2011 lähtien satelliitit ovat jakautuneet radoillaan epätasaisesti. Uutta geometriaa kutsutaan nimellä "expandable constellation", *SPS performance standard*.

^bKaltevilla geosynkroonisilla radoilla (IGSO) on 3–5 lisäsatelliittia (IGSO) ja oikeilla geostationaarisilla radoilla 5.

^cUudet CDMA-lähettykset.

^dBeiDou-3.

laukaistiin vuosina 1990–1997. Vuonna 2019 sarjan viimeinen satelliitti ei enää toiminut kunnolla ja se kytkettiin pois päältä.

Block IIR Kirjain R merkitsee *replenishment*. Yhteensä 12 satelliittia laukaistiin vuosina 1997–2004.

Block IIR-M Kirjain M merkitsee *military*. Kahdeksan satelliittia lau-



kaistiin vuosina 2005–2009.

Block IIF Kirjain F merkitsee *follow-on*. Yhteensä 12 satelliittia laukaistiin vuosina 2010–2016.

Block III Tämän mallin satelliitteja tullaan rakentamaan kymmenen. Ensimmäinen niistä laukaistiin vuonna 2018.

Block IIIF Suunnitteilla on satelliittien laukaisuja vuosille 2026–2034.



11.1.2 Uudet koodit ja taajuuudet

Ensimmäinen Block IIR-M -satelliitti laukaistiin 25. syyskuuta 2005. Se oli ensimmäinen, joka lähetti uutta sotilaskoodia M. Se oli myös ensimmäinen, joka lähetti uutta siviilikoodia L2C moduloituna kantoaaltoon L2. L2C sisältää uudet näennäissatunnaiskoodit CM (*Civil Moderate*) ja CL (*Civil Long*), joiden toistojaksojen pituudet ovat 10 230 ja 767 250 bittiä.

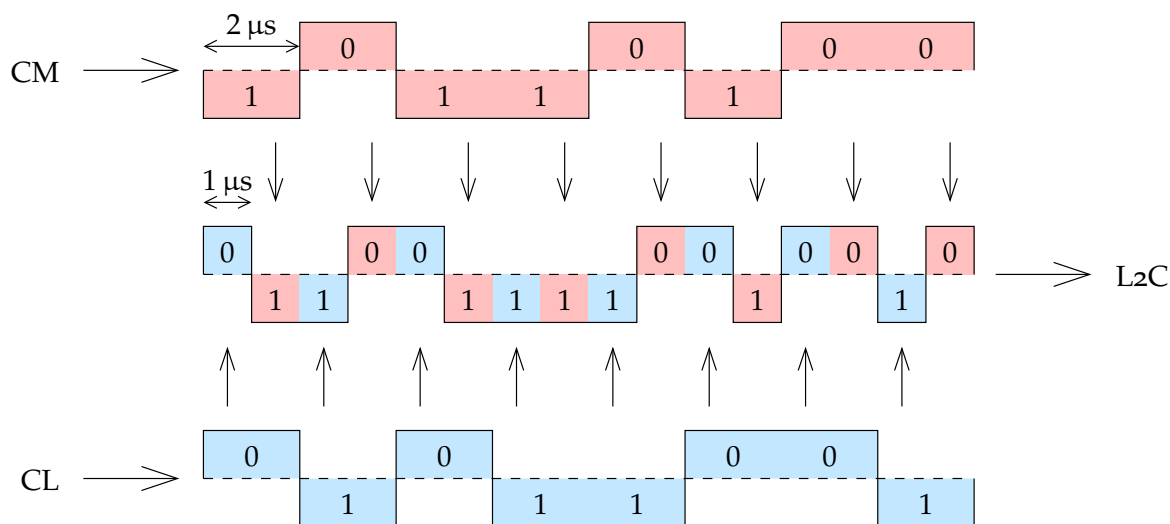
Molemmat koodit luodaan modulaatiotaajuudella ("chip rate") 511 500 bittiä sekunnissa. Koodit yhdistetään tekniikalla, jota kutsutaan *aikajakomultipleksoinniksi*: jonoon otetaan bittejä vuorotellen CM:n ja CL:n bittijonoilta, mikä muistuttaa moottoritien risteyksessä yhdistyviä autovirtoja. Uudessa jonossa jokaisen bitin pituus on vain puolet alkuperäisestä ja modulaatiotaajuus on 1 023 000 bittiä sekunnissa eli 1,023 MHz. Katso kuva 11.1.

L2C sisältää myös parannetun navigointiviestin, jossa on muun muassa GPS-järjestelmän ja muiden GNSS-järjestelmien välisten aikaskaalojen siirtymät. Tämä on tärkeää yhteiskäytössä GLONASSin ja Galileon kanssa.

Uusi taajuus L5, 1176,45 MHz, on tarkoitettu *safety-of-life* (SoL) -tyyppiseen käyttöön etenkin ilmailussa, katso osio 10.3. Taajuus on varattu kansainvälisesti ilmailun käyttöön. Block IIF -satelliitit kantavat tätä taajuutta ensimmäisinä. Myös SBAS-järjestelmät käyttävät L5-taajuutta. Yhdessä L1-taajuuden kanssa L5-taajuutta voidaan käyttää poistamaan ionosfäärin etenemisviive mittauksista.

Tarjolle on tullut myös uusi siviili L1C-signaali, joka on houkutteleva vaihtoehto L1-taajuuden vanhalle C/A-koodille. Signaalia on lähettänyt tammikuusta 2020 lähtien ensimmäinen Block III -satelliitti, joka laukaistiin joulukuussa 2018. Signaalilla on monimutkainen rakenne, johon kuuluu data- ja pilottikomponentti, joista molemmat ovat samassa vaiheessa toistensa ja lisäksi L1:n P(Y)-koodin kanssa. Molemmat ovat BOC-moduloituja. Pilotti käyttää niin sanottua TMBOC-modulaatiota, eli





KUVA 11.1. L2C ja aikajakomultipleksointi. L2C sisältää myös modernisoidun navigointiviestin nimeltä CNAV nopeudella 50 bittiä sekunnissa.

aikamultipleksoitua binaarista offset kantaalto -modulaatiota. **BOC**-moduloinnin ansiosta signaali erottuu paremmin **BPSK**-moduloidusta C/A-koodista.

Näin ollen käytössä on nyt *neljä* siviili-**GPS**-signaalia: C/A, L2C, L5 ja L1C.



11.2 Venäläinen GLONASS-järjestelmä

GLONASS-järjestelmän kehitys alkoi Neuvostoliitossa jo vuonna 1976. Virallinen lähde on **GLONASS news**, joka näyttää myös konstellation tilannekuvan.

Huhtikuussa 2020 kiertoradalla oli 27 satelliittia, joista 24 oli käyttökelpoisia. Satelliittien määrä on kasvanut hitaasti. Pitkän alennustilan jälkeen 1990-luvulla järjestelmä on nyt taas täysin toiminnassa.



11.2.1 Alkuperäisjärjestelmän taajuudet ja signaalit

Alkuperäistä **GLONASS**-järjestelmää kuvaa Interface Control Document (**ICD**) vuodelta 2008. Se sisältää 65 sivua englanniksi, katso **GLONASS ICD**.

GLONASS-järjestelmä eroaa sekä **GPS**:stä että **Galileo**sta siinä, että jokaisella satelliitilla on oma kantaaltotaajuus. Ratkaisu on nimeltään **FDMA**, "frequency-division multiple access", eli taajuusjakokanavointi. Silti "antipodit" eli samassa ratatasossa vastakkain maapallon eri puolella

olevat satelliitit voivat käyttää samoja taajuuksia. Alkuperäiset taajuudet L1 ja L2 ovat

$$f_{L1} = f_{01} + K\Delta f_1,$$

$$f_{L2} = f_{02} + K\Delta f_2,$$

jossa K on satelliitin kanavanumero, joka löytyy almanakasta, ja

$$f_{01} = 1602 \text{ MHz}, \quad \Delta f_1 = 562,5 \text{ kHz},$$

$$f_{02} = 1246 \text{ MHz}, \quad \Delta f_2 = 437,5 \text{ kHz}.$$

Siviilikoodilla — C/A:ta vastaava — on bittitaajuus 0,511 MHz¹ ja salatulla sotilaskoodilla 5,11 MHz. Samaa modulaatiotekniikkaa käyttää myös GPS, eli kyseessä on vaihemodulaatio vaihesiirtymällä $\pi = 180^\circ$ — ”binary phase-shift keying” eli binaarinen vaiheavainnus. Navigointiviestin bittitaajuus on 50 Hz.

Satelliittien lähettämä säteily on ympyräpolarisoitu myötäpäivään, aivan kuten GPS:n säteily.



11.2.2 Aika, vertausjärjestelmä ja konstellaatio

GLONASSin aikaskaala on sama kuin UTC(SU) eli UTC:n Venäjän Federaation kansallinen toteutuma. Tämä merkitsee, että UTC:n karkaussekunnit joulukuun ja kesäkuun lopussa kulkeutuvat GLONASSin aikaskaalaan. Tämä on erilainen kuin GPS:n käytäntö: GPS-ajassa ei huomioida karkauksia.

Navigointiviesti sisältää aikaskaalojen UTC ja UTC(SU) väliset erotukset sekä ilmoitukset tulevista karkaussekunneista.

GLONASSin käyttämä koordinaattien vertauskehys on PZ-90 (”Maan parametrit 1990”), joka on geosentrinen, mutta eroaa hieman WGS84:stä. Satelliittien lähettämä rataennuste ilmoittaa satelliitin paikan avaruudessa suorakulmaisina koordinaatteina. PZ-90:n viimeisin toteutuma, PZ-90.11, eroaa vain muutaman millimetrin ITRF2008:sta, Subirana ym. (2011).

GLONASS-satelliittien nimellinen lukumäärä täydellisessä konstellaatiossa on 24 kolmessa ratatasossa plus kolme varasatelliittia. Ratojen kaltevuuskulma päiväntasaajaan nähden eli inkliinaatio on $64^\circ 8'$. Korkea arvo palvelee paremmin entisen Neuvostoliiton aluetta. Kuten GPS:nkin

¹Siviilikoodin pituus on 511 bittiä, generoituna yhdeksän bitin lineaarisen palautteen siirtorekisterillä ($2^9 - 1 = 511$). Näin toistojaksoksi saadaan tarkasti yksi millisekunti.

tapauksessa myös **GLONASS**in satelliittien geometria toistuu jokaisena tähtivuorokautena. Toisin kuin **GPS**:llä *samassa* paikassa on silloin *toinen* satelliitti. Radan korkeus on 19 100 km ja rataperiodi 11^h16^m , eli lyhyempi kuin puoli tähtivuorokautta. Sama geometria toistuu yksittäisten satelliittien kannalta vasta 8 vuorokauden ja 17 kierroksen jälkeen. Ratkaisu vähentää resonanteja ratahäiriöitä, joiden korjaaminen **GPS**-järjestelmässä kuluttaa melko paljon rakettimoottorien ajoainetta.



11.2.3 Modernisointi

GLONASS on siirtymässä **CDMA**:han, ”code-division multiple access” eli koodijakokanavointiin,, jota käyttävät jo muut **GNSS**-järjestelmät. Muutos tekee järjestelmästä yhteensopivamman muiden kanssa, mikä helpottaa monen järjestelmän vastaanottimien suunnittelua. Siirto tapahtuu asteittain uusien laukaisujen mukaan.

Koodijakokanavointiratkaisua kuvaavat *Interface Control Documents* (**ICD**) löytyvät täältä: **GLONASS ICD CDMA (2016a,b,c,d)**. Käyttöön otetaan myös kolmas taajuus L_3 , $f_{L3} = 1202,025$ MHz. Vanhat taajuudet L_1 ja L_2 korvataan uusilla: $f_{L1} = 1600,995$ MHz ja $f_{L2} = 1248,06$ MHz, mikä on lähellä vanhoja keskitaajuuksia. Kaikilla kolmella taajuudella on sekä avoimia että salattuja signaaleja.

C/A-koodia vastaavan L_1 -siviilikoodin bittitaajuus pysyy *melkein* muuttumattomana 0,5115 MHz:ssä, mikä on *tarkasti* puolet **GPS**:n vastaavasta. Koodin pituus on nyt 1023 (data) ja 4092 bittiä (pilotti), ja sen lähettäminen kestää tarkalleen 2 ms ja 8 ms.

Navigointiviesti lähetetään taajuuksilla L_1 ja L_3 , ja sen bittitaajuus on 100 Hz.

Suunnitteilla on avaruuslohkon laajeneminen 30 satelliittiin 6 ratatasossa. Pidemmällä aikavälillä kantoaaltotaajuuksien yhdenmukaistaminen **GPS**-taajuuksiin L_1 ja L_5 , joita myös **Galileo** ja **BeiDou** käyttävät, ja **Galileo**on taajuuteen $E5b$, jota myös **BeiDou** käyttää, on suunniteltu yhteensopivilla modulaatioilla. Se tekisi monen järjestelmän vastaanottimien ja ohjelmistojen suunnittelusta entistä helpompaa.



11.3 Eurooppalainen Galileo-järjestelmä

Galileo-järjestelmä on Euroopan komission ja Euroopan avaruusjärjestön (**ESA**) yhteishanke. Sen hallinnollinen historia on ollut monivaiheinen. Kesäkuussa 2003 Euroopan komissio ja **ESA** muodostivat

TAULUKKO 11.2. **GLONASSin** näennäissatunnaiskoodit. Nykyinen **CDMA-**toteutus.

Taajuus (MHz)	Tyyppi	Modulaatio	Toisto- jakso (ms)	Vaihe
L1	1600,995	Tietoa ^a	BPSK (1)	2
		Pilotti	BOC (1, 1)	8
		Salattu	BOC (5, $\frac{5}{2}$)	I
L2	1248,06	CSI ^c	BPSK (1)	-
		Pilotti	BOC (1, 1)	20
		Salattu	BOC (5, $\frac{5}{2}$)	I
L3	1202,025	Tietoa ^a	BPSK (10)	1 I
		Pilotti	BPSK (10)	1 Q

^aKantaa navigointiviestiä.^bAikajakomultipleksointi.^cPalvelutietojen kanava.

yhteistyöelimen nimeltä "Galileo Joint Undertaking" (**GJU**), joka valitsi "concessionairen", yksityisyriksen nimeltä "Galileo Operating Company". Se vastasi **Galileo**on päivittäisistä toiminnoista ja etenkin sen kaupallistamisesta. Vuonna 2006 **GJU** lopetettiin ja perustettiin "European **GNSS** Supervisory Authority" (**GSA**). Vuonna 2010 sitä uudelleenjärjesteltiin ja uudeksi nimeksi valittiin "European **GNSS** Agency (**GSA**)".

Tärkeä motivaatio **Galileo**lle oli ja on edelleen teknologinen riippumattomuus Yhdysvalloista. Asian merkitystä korosti Yhdysvaltojen yksipuolinen hyökkäys Irakiin maaliskuussa 2003. **Galileo** on virallisesti siviilijärjestelmä ja siviiliviranomaisten hallinnoima, mutta se on olennainen osa myös monien maiden sotilassuunnittelua.



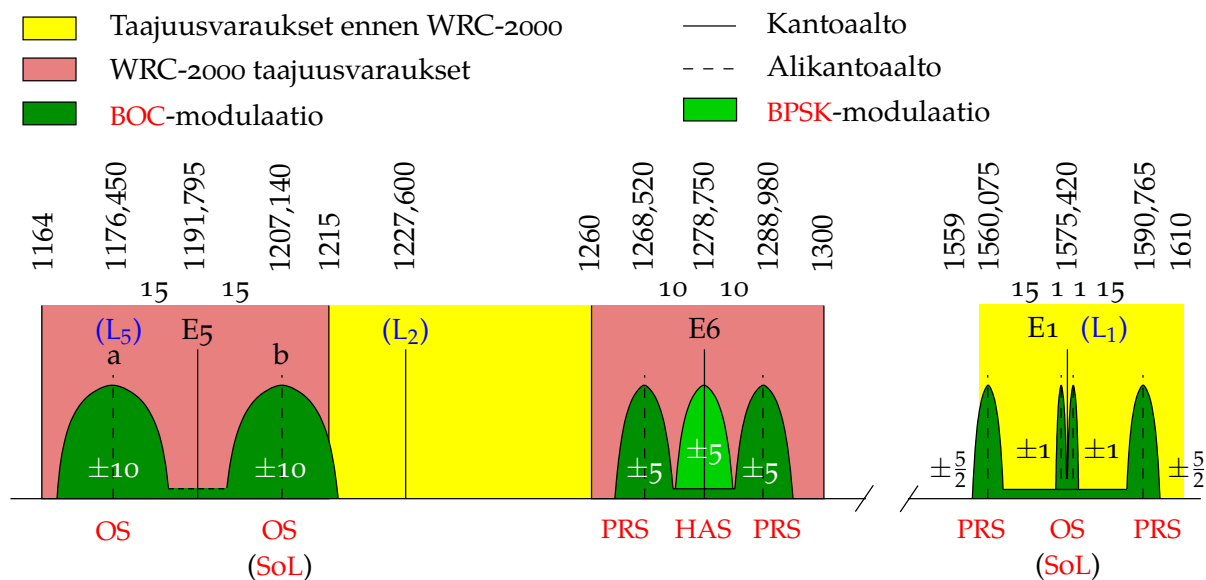
11.3.1 Satelliitit ja niiden radat

Galileo-satelliittejä on suunnitteilla kolmekymmentä. Kolmella ratatasolla on kullakin kahdeksan satelliittia ja kaksi varasatelliittia. Satelliittien välimatka on ratatasolla 45°. Ratatasojen kaltevuuskulma päiväntasaajaan nähden eli inkliinaatio on 56°.

Galileo-satelliittien ratojen korkeus on 23 222 km, eli selvästi korkeampi kuin **GPS**-radoilla. Radan periodi on 14^h05^m.

Kymmenen päivän eli 17 rata kierroksen jälkeen samat satelliitit ovat





KUVA 11.2. Galileon taajuudet: yksikkö MHz. WRC-2000 oli World Radiocommunications Conference Istanbulissa vuonna 2000. Kuvassa on tyylitelty kuvio, jossa vihreiden alueiden (päähuippujen) puolileveydet edustavat koodien bittinopeuksia. Taajuserot ja -hajonnat ovat "GPS-megahertseinä", jotka ovat 1,023 MHz:n kokoisia.

taas samoissa paikoissa havaintopaikan taivaalla.

Ensimmäinen kokeellinen Galileo-satelliitti oli GIOVE-A, joka laukaistiin joulukuun 28. päivänä 2005. Vuonna 2020 kiertoradalla on 22 toimivaa satelliittia, ja lisää on tulossa. Konstellation tosiaikaista tietoa antaa [European GNSS Service Centre](#).

11.3.2 Järjestelmän kuvaus ja komponentit

Galileo-järjestelmä on suunniteltu yhteensopivaksi GPS-järjestelmän kanssa. Se on myös tarkoitettu toimimaan saumattomasti SBAS-järjestelmien kanssa, kuten Euroopassa EGNOSin.

Galileon signaali- ja taajuusrakenne on monimutkainen, katso [ESA, Galileo Navigation Signals and Frequencies](#). Kantaaallot ovat

E1 1575,42 MHz (sama kuin GPS L1)

E5a 1176,45 MHz (sama kuin GPS L5)

E5b 1207,14 MHz

E6 1278,75 MHz.

Katso taulu 11.1 ja [Galileo OS SiS ICD](#).





11.3.3 Palvelut

Galileoon tarjoamat palvelut ovat seuraavat:

- Avoin palvelu (**OS**), joka on kaikkien käytettävissä. [E1, E5]
- *Safety-of-life*-palvelu (**SoL**). **Galileo** itsessään ei tarjoa *safety-of-life*-palveluita, mutta **EGNOS** (osio 10.5) tarjoaa. Suunnitteilla on myös **ARAIM**in eli edistyneen **RAIM**in käyttö eheyden seurannassa. [E1, E5b]
- Tarkkuuspalvelu (**HAS**). Palvelun vanhempi nimi oli ”kaupallinen palvelu”. [E6]
- Viranomaispalvelu (**PRS**). Tämä palvelu on suojattu muita palveluja paremmin häirintää vastaan. Käyttäjäkuntaan kuuluu muun muassa poliisi, rajavartiolaitos, puolustusvoimat ja rauhanturvaajat. Se, että **Galileo**a kutsutaan ”siviilijärjestelmäksi”, toisin kuin **GPS**:ää, ei liene aivan oikein . . . [E1, E6]

Galileo-satelliitit kantavat myös etsintä- ja pelastuspalvelun (**SAR**) transpondereita, jotka kuuluvat Cospas-Sarsat-järjestelmään.

Katso **Ávila Rodríguez (2011)** ja kuva 11.2.



11.4 Kiinalainen BeiDou-järjestelmä

Järjestelmän nimi **BeiDou** tarkoittaa Otava-tähdistöä (*Ursa Major*), jota käytetään Pohjantähden (Polaris, α UMi) löytämiseksi. Nimi onkin navigoinnin vertauskuva. Kansainvälisesti on käytetty myös nimeä ”*Compass*”. Virallinen englanninkielinen nimi on ”*BeiDou Navigation Satellite System*”, ja virallinen verkkosivu on **BeiDou Navigation Satellite System**.



11.4.1 BeiDou-1

Vanhempi **BeiDou-1**-järjestelmä, joka palveli Kiinan aluetta, koostui kolmesta satelliitista geostationaarisilla radoilla. Se poistui käytöstä vuonna 2012.

Tähän päivään mennessä on saatu selville, että ensimmäinen järjestelmä toimi itsenäisesti. Maa-asema lähetti signaalin kahden satelliitin kautta tuntemattomalla paikalla olevalle vastaanottimelle, joka vastasi satelliittien kautta. Kyseessä oli siis *aktiivinen* järjestelmä. Lisäehtona käytettiin Kiinan alueen tarkkaa maastomallia. Laskettu paikka lähetettiin takaisin vastaanottimelle. Ilmoitetut paikannustarkkuudet olivat

välillä ± 20 –100 m.



11.4.2 BeiDou-2 ja -3

BeiDou-2 ja -3-järjestelmiä kutsutaan englanniksi nimellä "*Compass*".

BeiDou-2-sarja koostuu (2020) kymmenestä satelliitista, joista viisi on geostationaarisilla radoilla. Sarja tarjoaa paikannuspalveluita Aasiassa ja Tyynellä valtamerellä. Laukaisutoiminta oli tiivistä vuosina 2010–2012 (**BeiDou Constellation Status**).

Marraskuussa 2017 alkoi tiivis **BeiDou-3**-satelliittien laukaisujen sarja. 27. joulukuuta 2018 palvelu ilmoitettiin (**Xinhua, 2018**) globaalisti toimivaksi. Täysi konstellatio — 35 satelliittia, joista 5 geostationaarisia — saavutettaneen 2020.

Sekä **BeiDou-2** että **BeiDou-3** lähettävät kolmella taajuuskaistalla B1, B2 ja B3. **BeiDou-3**-järjestelmän dokumentoidut julkisen palvelun signaalit ovat B1C, B1I, B3I ja B2a, katso *interface control documents* **BeiDou ICD** (2017, 2018a,b, 2019). Tällä hetkellä ei ole B2b:n ICD:tä.

- o B1C toimii kantoaallon taajuudella 1575,42 MHz, joka on sama kuin **GPS**:n taajuus L1. B1C myös muistuttaa **GPS**-signaalia L1C ja **Galileon** E1 OS (avoimen palvelun) -signaalia, paitsi kvadratuurin käytössä.
- o B2a toimii taajuudella 1176,45 MHz, joka on sama kuin **GPS**:n taajuus L5 ja **Galileon** taajuus E5a. Myös modulaatio näyttää identtiseltä **GPS**:n ja **Galileon** kanssa.

Katso taulu 11.1 ja taulukko 11.3.

BeiDoun julkisen palvelun signaali ei ole salattu, vaan vapaasti kaikkien käytettävissä. Tarkkuus on ± 10 m **BeiDou-2**:lle, ja **BeiDou-3**-järjestelmän tarkkuustavoite on $\pm 0,5$ m. **BeiDou-3**-järjestelmän signaali sisältää myös eheystietoja, katso osio 10.3.

Radat ovat hieman korkeampia kuin **GPS**-satelliittien radat: 21 528 km. Ratatasojen kaltevuuskulma on 55° .

BeiDou-3-järjestelmä sisältää kolme satelliittia radoilla nimeltä *inclined geosynchronous orbits* (**IGSO**) korkeudella 35 786 km. Oikeasti geostationaarisilla kiertoradoilla on kolme satelliittia.

Relevantit dokumentit ja ajantasalla oleva tieto konstellation tilasta ja satelliittien terveydestä löytyy lähteestä **BeiDou Introduction**.



TAULUKKO 11.3. BeiDou-3:n näennäissatunnaiskoodit.

Signaali	Taajuus (MHz)	Tyyppi	Modulaatio	Toisto- jakso (ms)	Vaihe
B2a ^a	1176,45	Tietoa ^b	BPSK(10)	1	I
		Pilotti	BPSK(10)	1	Q
B1C ^c	1575,42	Tietoa ^b	BOC(1,1)	10	I
		Pilotti	BOC(1,1)	10	Q
		Pilotti	BOC(6,1)	10	I
B3I	1268,52	Tietoa ^b	BPSK(10)	1	
B1I ^d	1561,098	Tietoa ^b	BPSK(2)	1	

^aIdenttinen GPS:n L5 kanssa.

^bKantaa navigointiviestiä.

^cMuistuttaa GPS:n L1C:tä.

^dB2a tulee korvaamaan tämän.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Miten aikajakomultipleksointi toimii?
- 2) Selitä ero koodijakokanavoinnin (CDMA) ja taajuusjakokanavoinnin (FDMA) välillä.
- 3) Miksi GLONASS-satelliittien ratojen kaltevuuskulma eli inkliinaatio on niin paljon suurempi kuin muiden järjestelmien satelliittiratojen inkliinaatiokulmat?
- 4) Mitkä palveluja Galileo tarjoaa?
- 5) SBAS-vastaanottimet toimivat kahdella taajuudella: GPS L1 ja L5. Tämä pätee kaikille SBAS-järjestelmille: WAAS, EGNOS, MSAS, QZSS ja GAGAN. Selitä, miksi tämä standardi oli välttämätön ilmailun kaltaisella alalla.
- 6) SBAS-vastaanottimet toimivat kahdella taajuudella: GPS L1 ja L5. Ne ovat identtisiä Galileon taajuuksien E1 ja E5a sekä BeiDoun taajuuksien B1C ja B2A kanssa. Miksi arvelet, että Galileon ja BeiDoun suunnittelijat ovat tehneet tämän valinnan?



Painovoiman mittaus lennossa

12

Sanonta on kuuluisa:

”Toisen kohina on toisen signaali”.

Inertianavigointi perustuu oletukseen, että Maan painovoimakenttä tunnetaan. Silloin voidaan alkusijainnista $\mathbf{x}(t_0)$ ja alkunopeudesta $\mathbf{v}(t_0)$ laskea sijainti ja nopeus eteenpäin ajassa askel kerrallaan, kunnes saadaan sijainti ja nopeus $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ myöhempään aikaan t .

Käänteisesti, jos on olemassa *riippumaton* tietolähde, kuten GNSS-vastaotin, joka antaa sijainnin ja nopeuden kehityksen ajassa riittävän tarkasti, voidaan inertiateknologia valjastaa Maan painovoimakentän kartoittamiseen.

Hyvin toimivien navigointisatelliittijärjestelmien ansiosta nykyään on mahdollista suorittaa gravimetrisia mittauksia ilmasta. Myös Maan painovoimakentän kartoittaminen satelliittien avulla perustuu satelliitin tarkan kolmiulotteisen liikkeen jatkuvaan seurantaan GNSS-järjestelmän avulla.

Olkoon lentokoneen tai satelliitin sijainti inertiaalisessa koordinaatistossa ajan funktiona $\mathbf{x}'(t)$ ja sen diskreetti mittausaikasarja $\mathbf{x}'_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}'(t_i)$. Silloin geometrinen kiihtyvyys voidaan laskea likimäärin seuraavasti:

$$\mathbf{a}'(t_i) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}' \right|_{t_i} \approx \frac{\mathbf{x}'_{i+1} + \mathbf{x}'_{i-1} - 2\mathbf{x}'_i}{\Delta t^2},$$

jossa $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} t_{i+1} - t_i$ on peräkkäisten epookkien aikaväli.

Oletetaan, että samanaikaisesti ”painovoima” $\tilde{\mathbf{g}}$, joka *tuntuu* lentokoneessa, mitataan kiihtyvyysmittarilla. Tässä vaiheessa oletamme yksinkertaisuuden vuoksi myös, että \mathbf{x}' ja $\tilde{\mathbf{g}}$ on annettu samalla akselistolla eli kiihtyvyyden mittausakseleiden suunnat ovat samat kuin paikkakoordinaattiakseleiden suunnat.

Silloin Maan inertiaalisessa koordinaatistossa pätee yhtälön 5.13 mukaan

$$\mathbf{g}' = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a}', \quad (12.1)$$

jossa $\tilde{\mathbf{g}} = -\tilde{\mathbf{a}}$. Nyt yhtälön 5.14 mukaan painovoima Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa on

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}' - \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle \rangle. \quad (12.2)$$

Sijoita yhtälö 5.12 yhtälöön 12.1:

$$\mathbf{g}' = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle + \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle \rangle.$$

Tämän sijoitus yhtälöön 12.2 antaa

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle. \quad (12.3)$$



12.1 Vektori-ilmagravimetria

Jos lentokoneessa on sekä inertiamittausyksikkö että GNSS-vastaanotin, voidaan määrittää $\mathbf{x}(t_i)$, $\mathbf{v}(t_i)$, $\mathbf{a}(t_i)$ ja $\tilde{\mathbf{g}}(t_i)$, ja yhtälön 12.3 avulla voidaan laskea $\mathbf{g}(t_i)$. Tällä menetelmällä kartoitetaan siis painovoimakenttä ilmasta.

Käytännössä sekä GNSS-laitteen että inertialaitteen tuottamat tietovirrat syötetään Kalmanin suotimeen, joka tulostaa koneen tarkan reitin ja painovoimaprofiilin. Vektori-ilmagravimetriassa painovoima mitataan kolmiulotteisena vektorina. Tiedonsiirtonopeus on tyypillisesti korkea: useita havaintoepookkeja sekunnissa. Lentokoneen liikkeiden takia sekä geometrisen kiihtyvyyden \mathbf{a} että koneessa tuntuvan painovoiman $\tilde{\mathbf{g}}$ ajalliset vaihtelut ovat suuria, tuhansia milligalleja, mutta suureen \mathbf{g} lopullinen määrittystarkkuus voi olla jopa vain muutaman milligalin.

Vektori-ilmagravimetria ei ole tarkkuudeltaan samaa tasoa kuin seuraavana esitettävä tekniikka: skalaari-ilmagravimetria. Tämä johtuu siitä, että inertialaitteen sisältämät tarkat kiihtyvyydsmittarit eivät ole parhaiden gravimetrien tasolla.



12.2 Skalaari-ilmagravimetria

Tässä tekniikassa käytetään perinteistä *gravimetria* eli painovoiman mittauskajetta. Gravimetri on modifioitu siten, että sen avulla on mahdollista tehdä mittauksia ympäristössä, jossa vaikuttavat painovoiman lisäksi voimakkaat, vaihtelevat geometriset kiihtyvyydet. Modifikaatio,



vaimennus, on sama kuin se, joka tehdään, jotta mittaukset merellä olisivat mahdollisia. Gravimetri asennetaan *vakautetulle alustalle*. Alustan vakautus tapahtuu gyroskooppien avulla, katso osio 5.5.

Gravimetri mittaa kulkuneuvon sisällä ”tuntuvaan” vapaan putoamisen kiihtyvyyden, mutta vain paikallisen luotiviivan suuntaan. Jos paikallisen luotiviivan suunta on yksikkövektori \mathbf{n} (*alaspäin*), on mitta-suure $\tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{g}} \rangle$.

Lähdetään yhtälöstä 12.3:

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle.$$

Lasketaan skalaaritulo normaalin \mathbf{n} kanssa:

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{g}} \rangle + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle + 2 \langle \mathbf{n} \cdot \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle \rangle = \|\mathbf{g}\| \stackrel{\text{def}}{=} g,$$

koska luotiviiva on painovoiman suuntainen. Siis

$$g = \tilde{g} + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle + 2 \langle \mathbf{n} \cdot \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle \rangle.$$

Jos lentokone seisoo maassa, $\mathbf{a} = \mathbf{v} = 0$, siis $g = \tilde{g}$. Jos lentokone on ilmassa, termi

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle = -\frac{d}{dt} v_{\text{ylös}} + \frac{v_{\text{itä}}^2}{N+h} + \frac{v_{\text{pohj}}^2}{M+h}$$

edustaa pystysuuntaista kiihtyvyyttä. Tässä $v_{\text{ylös}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} h$, jossa h on korkeus vertausellipsoidista. Vertausellipsoidin käyttö tällä tavalla tuo kaksi termiä maanpinnan kaareutumisesta alaspäin: pystysuuntainen kiihtyvyys on sama kuin korkeuden toinen derivaatta vain, jos vaakaliikettä ei ole. $M(\varphi)$ ja $N(\varphi)$ ovat Maan vertausellipsoidin kaarevuussäteet meridiaanisuunnassa (etelä-pohjoinen) ja poikittaissuunnassa (länsi-itä): meridiaani- ja poikittaiskaarevuussäteet.

Termi

$$2 \langle \mathbf{n} \cdot \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle \rangle = 2\omega_{\oplus} \cos \varphi \cdot v_{\text{itä}}$$

edustaa lentokoneen länsi-itäsuuntaisen nopeuden aiheuttamaa corioliskiihtyvyyttä, jolla on pystysuuntainen komponentti: lentokone on hieman kevyempi lentäessään Maan pyörähdysliikkeen mukana ja hieman painavampi lentäessään sitä vastaan.



Ilmaistuna geodeettisiin koordinaatteihin (φ, λ, h) saadaan

$$g = \tilde{g} - \frac{d}{dt}v_{\text{ylös}} + \overbrace{\left((N+h) \left(\left(\omega_{\oplus} \cos \varphi + \frac{v_{\text{itä}}}{N+h} \right)^2 - (\omega_{\oplus} \cos \varphi)^2 \right) \right)}^{\text{länsi-itä, ero}} + \overbrace{\frac{v_{\text{pohj}}^2}{M+h}}^{\text{etelä-pohjoinen}} = \\ = \tilde{g} - \frac{d}{dt}v_{\text{ylös}} + \left(\frac{v_{\text{itä}}}{N+h} + 2\omega_{\oplus} \cos \varphi \right) v_{\text{itä}} + \frac{v_{\text{pohj}}^2}{M+h}.$$

Tässä $v_{\text{itä}}$ ja v_{pohj} ovat nopeuden itä- ja pohjoiskomponentit, ja ω_{\oplus} on Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus. Suure h on korkeus vertausellipsoidista ja φ maantieteellinen leveysaste.

Painovoima g sisältää jo Maan pyörähdysliikkeen aiheuttaman keskipakoiskiihtyvyyden pystyosuuden $-(N+h)(\omega_{\oplus} \cos \varphi)^2$, aivan kuten painovoimavektori \mathbf{g} sisältää Maan pyörimisliikkeen keskipakoiskiihtyvyyden, $-\langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{x} \rangle \rangle$, vektorina, yhtälö 12.2.

Yllä olevan yhtälön kahta viimeistä termiä kutsutaan Eötvös¹ korjaukseksi, katso Wei ja Schwarz (1996).



12.3 Kalmanin suotimen käyttö ilmagravimetriassa

Kirjoitetaan yhtälö 12.3,

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle,$$

stokastisesti "dynaamisen kohinan" \mathbf{n}_a kanssa:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}} - 2 \langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle + \mathbf{n}_a.$$

Geosentrisissä koordinaateissa voidaan kirjoittaa määritelmällä 5.9:

$$\langle \vec{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{v} \rangle = \omega_{\oplus} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\oplus} \Omega \mathbf{v}.$$

Muodosta ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}} - 2\omega_{\oplus} \Omega \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_a \end{bmatrix}.$$

¹Paroni Loránd Eötvös de Vásárosnamény (1848–1919) oli unkarilainen fyysikko ja gravitaation tutkija.



Tässä $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{g}}(t)$ on mitattu suure, mutta $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t)$ ei ole.

Kirjoita

$$\mathbf{g} = \vec{\gamma} + \delta\mathbf{g},$$

jossa $\vec{\gamma}$ on sopiva vertausarvo, esimerkiksi normaalipainovoimakentästä laskettuna, ja $\delta\mathbf{g}$ on *painovoimahäiriö*. Mallinnetaan $\delta\mathbf{g}$ empiirisesti Gaussin ja Markovin prosessina, yhtälö 2.25:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{g} = -\frac{\delta\mathbf{g}}{\tau} + \mathbf{n}_g,$$

jossa τ on sopivasti valittu empiirinen aikavakio. Sen valinta riippuu paikallisen painovoimakentän käyttäytymisestä (korrelaatiopituus) sekä lentonopeudesta ja -korkeudesta.

Nyt Kalmanin suotimen dynaaminen malli on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -2\omega_{\oplus}\Omega & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\gamma} - \tilde{\mathbf{g}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_g \end{bmatrix}.$$

Tilavektorin pituus on näin ollen 9. Kerroinmatriisi on 3×3 -kokoinen ja koostuu 3×3 -kokoisista alimatriiseista eli kokonaiskoko on 9×9 alkia.

Hienostuneempi käsittelytapa ottaa huomioon, että painovoima on tuntemattoman sijainnin \mathbf{x} funktio:

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(\mathbf{x}) \approx \vec{\gamma}(\mathbf{x}^{(0)}) + \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(0)}) \Delta\mathbf{x},$$

jossa $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}(t)$ on sijainnin *likiarvo*, jota käytetään linearisoinnissa, katso alla. Tässä pulpahtaa esiin *gravitaatiogradienttitensori* \mathcal{M} , yhtälö 3.9.

Silloin myös \mathbf{x} ja \mathbf{v} on linearisoitava, ja on käytettävä linearisoituja tila-alkioita $\Delta\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}$, $\Delta\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v} - \mathbf{v}^{(0)}$ tilavektorissa. Likiaarvoja määrittelevä yhtälö on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{v}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{v}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\gamma}(\mathbf{x}^{(0)}) - \tilde{\mathbf{g}} \end{bmatrix}.$$

Lopputulos on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} \\ \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathcal{M} & -2\omega_{\oplus}\Omega & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau}\mathbf{I} \end{bmatrix}}^{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{x}^{(0)}}^{\mathbf{x}} \\ \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overbrace{0}^{\mathbf{n}} \\ \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_g \end{bmatrix}.$$



Päivitysaskkeen GNSS-havaintoyhtälö on

$$\vec{\ell}_k = \underline{\mathbf{x}}(t_k) + \underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{x}}^{(0)}(t_k) + \Delta \underline{\mathbf{x}}(t_k) + \underline{\mathbf{m}},$$

jossa ”kohinavektori” $\underline{\mathbf{m}}$ kuvaa GNSS-navigoinnin tilastollista epävarmuutta.

Sekä dynaamisille kohinatermeille $\underline{\mathbf{n}}_a$ ja $\underline{\mathbf{n}}_g$ että GNSS:n havaintokohinalle $\underline{\mathbf{m}}$ on muodostettava sopivia tilastollisia malleja (varianssit $Q_n(t)$ ja R) mittalaitteiden ja painovoimakentän ominaisuuksien perusteella. Vektorit $\underline{\mathbf{n}}_a$ ja $\underline{\mathbf{n}}_g$ edustavat lentokoneessa tehtyjen painovoimamittausten $\tilde{\mathbf{g}}$ epävarmuutta ja painovoimakentän $\delta \mathbf{g}$ vaihtelevuutta.

On hyvä pitää mielessä Kalmanin suotimen integroiva luonne. Mittaukset $\tilde{\mathbf{g}}$ sisältävät vahvoja korkeataajuisia eli alle sekunnin vaihteluita, jotka syntyvät koneen liikkeistä. Nämä vaihtelut imeytyvät helposti koneen nopeuden \mathbf{v} ja sijainnin \mathbf{x} estimaatteihin, kuten pitääkin, eivätkä vaikuta suureeseen $\delta \mathbf{g}$, jonka korrelaatioaika τ on pitkä. Jotta spatiaalinen erotuskyky lentorataa pitkin olisi hyvä, lentonopeuden tulisi olla mahdollisimman alhainen. Potkurikoneet, kuten suosittu kanadalainen DHC-6 Twin Otter^{®2}, ovat sopivia tähän.



12.4 Antureiden välinen kalibrointi

Yllä olevassa teoriassa oletetaan, että GNSS-paikannusmittaukset ja gravimetriset mittaukset viittaavat samaan kohtaan lentokoneen sisällä. Niin ne eivät kuitenkaan tee: GNSS-antennit on asennettava katolle, joka on painajaismainen paikka monitieheijastusten kannalta, ja gravimetri puolestaan sijaitsee alempana lentokoneen sisällä. Kojeiden integrointi edellyttää niiden välisten siirtymävektorien määrittämistä kalibroimalla.

Hyvä tapa on *in-flight*-kalibrointi: lentokoneen runko on taipuisa, joten vektorit ovat erilaisia, kun kone seisoo maassa ja kun se on ilmassa. Vektorit riippuvat myös polttoainelastista. Siirtymävektorit on sisällytettävä tuntemattomina mittausten käsittelyyn, tavallisesti Kalmanin suotimen avulla, katso osio 12.3.



12.5 Ilmagravimetrian nykytila

Ensimmäisiä menestyksekkäitä ilmagravimetriaprojekteja oli Brozena (1992), eli Grönlannin painovoimakartoitus *Greenland Aerogeophysics Projectin* puitteissa.

²Twin Otter on Viking Air Ltd:n rekisteröity tavaramerkki.



KUVA 12.1. Lockheed Hercules C-130³ nousee (suksilla!) Grönlannin NorthGRIP-jääkairausasemalta, joka sijaitsee kolme kilometriä merenpinnan yläpuolella. Huomaa JATO-raketit (*jet-assisted take-off*), jotka avustavat lentoon lähtöä kiitoradalta, joka on myös kolme kilometriä pitkä. Nielsen (2005).

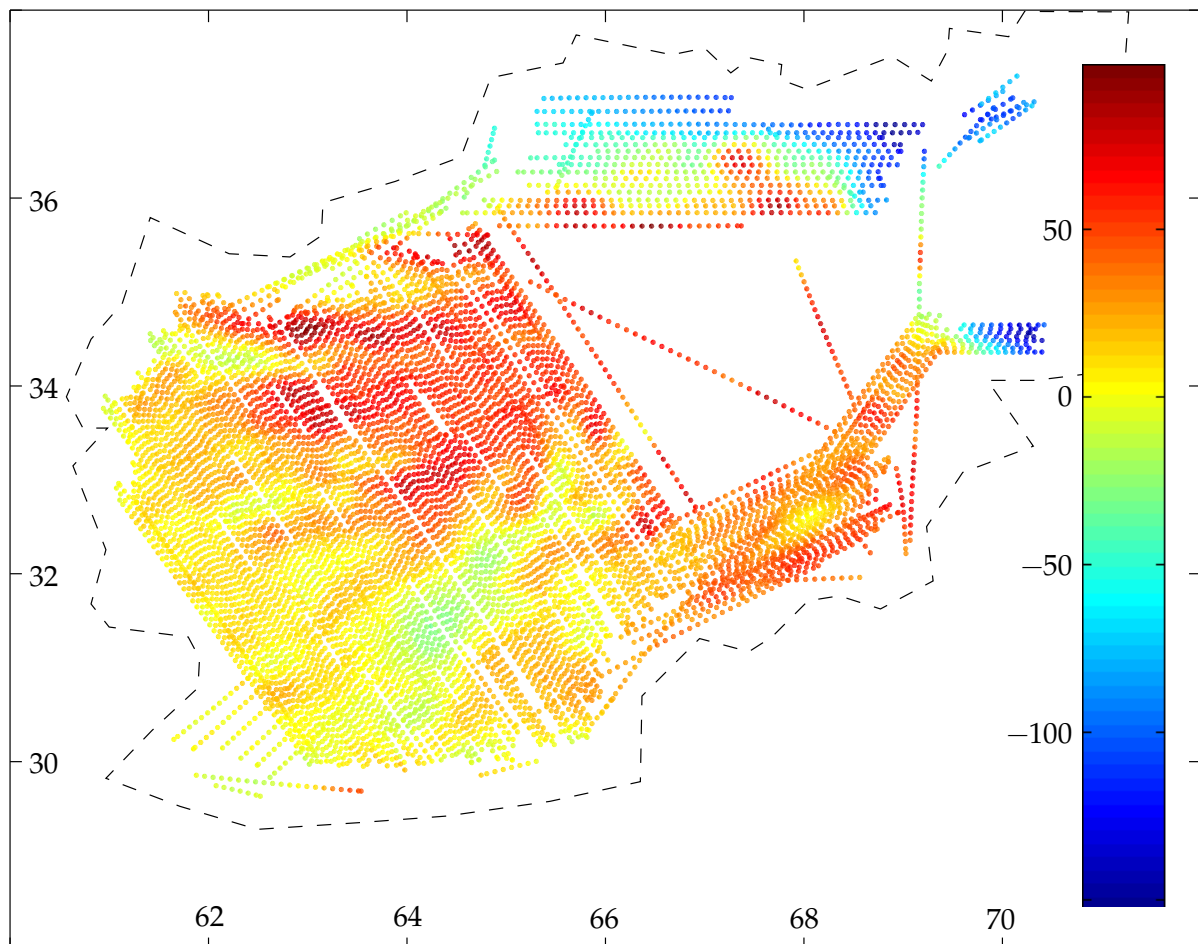


Tässä yhteydessä on hyvä mainita myös monia myöhempiä mittauksia, joita on tehty usein arktisilla alueilla tai Etelämantereella, lue lisää Forsberg ym. (1996, 2011). Näiden työmaiden logistiset edellytykset ovat yleensä ”haastavia”, katso kuva 12.1.

Ilmagravimetria on sopiva tekniikka, jos kartoitettava alue on laaja eikä aikaisempia maanpinnalla tehtyjä painovoimakartoituksia ole saatavilla. Ilma- ja avaruusgravimetrian etuihin kuuluu *homogeenisuus*: mittauksen laatu on sama laajojen alueiden yli, ja pitkien etäisyyksien yli ulottuvat systemaattiset virheet ovat pieniä. Tämä on erityisen tärkeää, jos painovoima-aineisto on tarkoitettu geoidimallin määrittämiseen.

Viime aikoina on suoritettu ilmagravimetriamittauksia esimerkiksi Etiopiassa (Bedada, 2010), Mongoliassa (Munkhtsetseg, 2009), Indonesiassa (2010) ja muutamissa muissakin maissa.

³C-130 on The Lockheed Martin Corporationin rekisteröity tavaramerkki.



KUVA 12.2. Afganistanin ilmagravimetriakartoitus. Värit esittävät ilma-anomalioita lentokorkeudella. Yksikkö on milligal (USGS Open-File Report 2008-1089). Alkuperäisaineistoa on harvennettu 50×.



12.6 Maan painovoimakentän tutkimus avaruudesta

Yhtälössä 12.1 suure \tilde{g} on noin Maan pinnan painovoiman suuruinen (noin 10 m/s^2), kun geometrinen kiihtyvyys a' on huomattavasti pienempi. Ihannetapauksessa geometrinen kiihtyvyys olisi nolla, mikä vastaa mittauksia kiinteän Maan pinnalla. Sekä meri- että ilmagravimetriassa geometrinen kiihtyvyys eroaa kuitenkin nolasta, mikä hankaloittaa painovoiman tarkkaa mittausta. Kulkuneuvon liikkeet ovat mittauksen kannalta häiriöitä.

Avaruudesta tapahtuvassa painovoimakentän mittauksessa tilanne on päinvastainen. Satelliitissa tuntuva paikallinen painovoima \tilde{g} on nolla tai hyvin lähellä nollaa eli *painottomuustilaa*. Geometrinen kiihtyvyys a' on melkein Maan pinnan painovoiman suuruinen, koska satelliitti *putoaa* vapaasti lentäessään kiertoradalla. Geometrinen kiihtyvyys

mitataan GNSS:n avulla: *"high-low satellite-to-satellite tracking"*. Myös satelliitin oma ei-inertiaalinen liike $\tilde{\mathbf{a}} = -\tilde{\mathbf{g}}$ mitataan kiihtyvyyssmittareiden avulla. Liikkeen suurin aiheuttaja on ilmakehän vastus, koska painovoimakenttää tutkivan satelliitin rata valitaan mahdollisimman alhaiseksi: radan korkeus on tyypillisesti 250–400 km.

Viime vuosikymmenien aikana on lentänyt kolme eri painovoimamissiota: CHAMP, GRACE ja GOCE.

- CHAMP (GFZ, CHAMP — Challenging Minisatellite Payload). Pieni saksalainen satelliitti lensi vuosina 2000–2010 ja tuotti kohdallaisen suuren määrän dataa.
- GRACE (University of Texas, GRACE — Gravity Recovery and Climate Experiment). Pieni amerikkalais-saksalainen satelliittipari mittasi erikoislaitteensa avulla tarkan etäisyyden peräkanaa lentävän satelliittiparin ("Tom" ja "Jerry") välillä: *"low-low satellite-to-satellite tracking"*. Mittausten tavoitteena oli Maan painovoimakentän ajallisten muutosten seuraaminen. Lento, vuodesta 2003 vuoteen 2018, oli suuri menestys. Animaatio sen tuloksista löytyy kuvasta 12.3. Tällä hetkellä toiminnassa on sen seuraaja, GRACE-FO ("GRACE Follow-On").
- GOCE (Gravity Field and Ocean Circulation Explorer). Satelliitti kartoitti vuosina 2009–2013 Maan painovoimakentän hyvin yksityiskohtaisesti gravitaatiogradiometrin avulla, katso ESA, *Introducing GOCE*. GOCE-satelliitilla oli ionimoottori ilmakehän vastuksen kompensoimiseksi. Se mahdollisti myös matalan radan. Suunnittelijoille oli haaste erottaa gravitaatiogradientti ilmakehän ja Maata kiertävän satelliitin oman hitaan pyörimisen vaikutuksista.

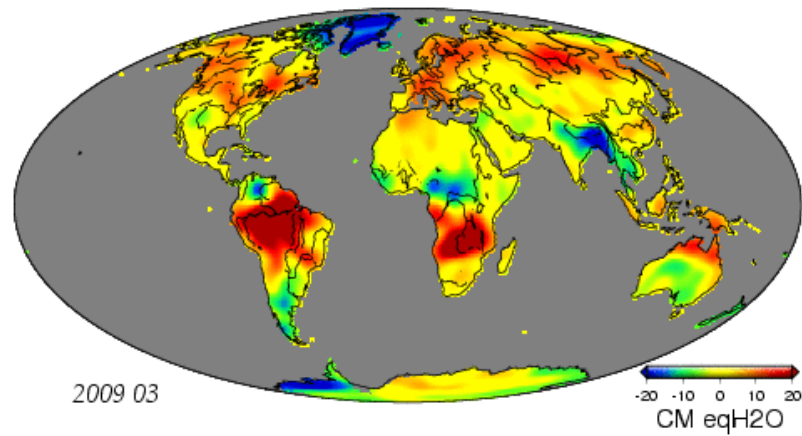
Kaikissa satelliiteissa oli mukana GNSS-vastaanotin ja kiihtyvyyssmittareita, GOCE:n tapauksessa jopa kokonainen gradiometri. Se sisälsi kuusi äärimmäisen herkkää kiihtyvyyssmittaria.



Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Mikä teknologian kehitysaskel teki gravimetriset mittaukset ilmasta yhtäkkiä mahdollisiksi?
- 2) Mitkä ovat erot vektori- ja skalaari-ilmagravimetrian välillä?
- 3) Mikä on ero lentokoneessa tapahtuvan painovoimamittauksen $\tilde{\mathbf{g}}$ ja kiihtyvyyssmittauksen $\tilde{\mathbf{a}}$ välillä?





KUVA 12.3. **GRACE**-mission tulokset massan pintakerroksena ilmaistuna vastaavina vesisenttimetreinä. Hiirennapsautus antaa animaation (e-kirja).



- 4) Mikä on Eötvösön korjaus?
- 5) Katso kuvaa **12.1** ja lue kuvateksti. Miksi Hercules tarvitsisi **JATO**-raketteja lentoon lähtönsä avuksi? (kaksi syytä) Kuinka rakennetaan kiitorata mannerjäätikön päälle?
- 6) Miksi mittalaitteiden välisten siirtymävektorien *in-flight*-kalibrointi on suositeltavaa?
- 7) Miksi **GOCE**-satelliitilla oli ionimoottori?
- 8) Mitä on *high-low* ja *low-low satellite-to-satellite tracking*?



Anturifuusio ja sattuman anturit

13

Teknologisen navigoinnin taito syntyi merenkulussa kauan sitten. Kun ala kehittyi, vastaavat menetelmät otettiin käyttöön myös ilmailussa ja avaruusmatkailussa. Teknologinen navigointi leviää parhaillaan miljoonien tavallisten ihmisten elämään auto- ja jalankulkijanavigoinnin muodossa.

Antureita on tarjolla laaja kirjo: jotkut niistä on tarkoitettu navigointiin, kuten satelliittipaikannus ja inertiamittausanturit. Toiset on tarkoitettu muuhun käyttöön, mutta esimerkiksi mobiilitukiasemaverkkoja ja sisätilan langattomia lähiverkkoja (**WLAN**) voidaan soveltaa myös navigointiin. Siksi hyvä kysymys on, mikä on paras tapa käyttää näitä antureita yhdessä integroidulla tavalla.

Anturifuusio on monianturiratkaisu, jonka tarkoituksena on vähentää epävarmuutta, esimerkiksi paikan määrittämisessä navigoinnin aikana (**Wikipedia**, **Datafuusio**). Anturit voivat olla samanlaisia tai erilaisia, jolloin puhutaan homogeenisestä tai heterogeenisestä anturifuusiosta.

Anturifuusiota toteutetaan usein käyttämällä eri antureiden ulostuloja Kalmanin tai vastaavan suotimen syöttötietona. Jos käytetään raakoja havaintoja ja anturit mallinnetaan suotimen sisällä, puhutaan ”tiivisti integroidusta” anturifuusiosta. Jos anturit käsittelevät tietoja ennen niiden lähettämistä suotimen ohjelmistoon, puhutaan ”löysästi integroidusta” anturifuusiosta.

Sattuman anturit ovat antureita, jotka palvelevat jotain toista tarkoitusta, mutta jotka voidaan ottaa käyttöön paikannuksessa tai navigoinnissa. Esimerkkejä ovat seuraavat:

- Matkapuhelimen kiihtyvyysmittari. Sen päätarkoituksena on suunnata näyttö ylöspäin (potretti tai maisema) riippuen siitä, miten päin käyttäjä pitää puhelinta kädessään. Kiihtyvyysmitta-

ria voidaan käyttää myös antamaan navigaattorille paikallisen painovoiman suunta.

- Nopeusmittari autossa. Sen päätarkoituksena on tiedottaa kuljettajaa auton nopeudesta turvallisuuden ja nopeusrajoitusten takia.
- Ilmanpaineanturi lentokoneessa. Ilmanpainetta käytetään ensinnäkin korkeuden mittana, joka pitää lentokoneet turvallisesti erillään toisistaan pystysuunnassa. Ilmanpaine on myös koneen yläpuolella olevan ilmakehän ainemäärän mitta, joka vaikuttaa GNSS-satelliittien signaalin etenemiseen.

Anturifuusio voi sisältää myös *taustatietoa*, joka ei ole varsinaista anturin mittausta. Hyviä esimerkkejä ovat:

- Perinteinen tekniikka on käyttää tunnettuja maamerkkejä.
- Kulkuneuvo voi pysähtyä ja kertoa suotimen ohjelmistolle, että nopeus on nolla: *nollanopeuspäivitys*.
- Matkapuhelin, joka on kävelijän tai autoilijan käytössä voi olettaa, että sen näytön yläreuna osoittaa liikkumisen suuntaan.
- Auton sivuttaisen nopeuden oletetaan aina olevan nolla.
- Auton oletetaan aina seuraavan tietä, kuten tunnelissa GNSS-yhteyden ulkopuolella.
- Kiihtyvyyksille eri suuntiin voidaan olettaa ylärajat. Jos kulkuneuvossa on ihmisiä, ihmiskehon sietokyky asettaa raja-arvot.

Seuraavassa esitetään joitakin anturifuusion ja sattuman antureiden teknologioita. Kyseessä on laaja ja alati kasvava ala, joka perustuu nopeasti kehittyviin teknologioihin. Raapaisemme tässä vain sen pintaa.



13.1 Case: Sky Map

Matkapuhelimen antureiden luovan käytön esimerkkitapaus on avoimen lähdekoodin sovellus *Sky Map*, joka on saatavissa Android™¹-käyttöjärjestelmälle ([Google Play](#), [Sky Map](#)). Kalibroinnin jälkeen Sky Map näyttää tähdet oikeissa paikoissa, kun puhelinta pidetään taivasta vasten. Se näyttää jopa tähdet ja muut kohteet, jotka ovat horisontin alapuolella!

Kalibrointi tapahtuu valmistajan suosittelemalla kahdeksikkoliik-

¹Android on Google Inc:n tavaramerkki.



keellä eli pyörittämällä laitetta käsin kolmen eri akselin ympärillä. Ilmeisesti sovellus käyttää kolmen akselin kiihtyvyysmittaria, mikä on yleistä matkapuhelimissa. Lisäksi sovellus hydyntää magnetometria kompassipohjoisen löytämiseksi.

Tilannetta voidaan analysoida seuraavasti. Olkoon kiertomatriisi puhelimen koordinaatiston ja Maahan kiinnitetyn koordinaatiston välillä R . Olkoon painovoiman kiihtyvyysvektori \mathbf{g} ja magneettikentän vektori \mathbf{m} . Oletetaan, että molemmat vektorit voidaan laskea Maahan kiinnitetyssä koordinaatistossa ja mitata puhelimen rungon koordinaatistossa.

Näiden kahden vektorin perusteella voidaan konstruoida *ortonormaali kanta* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ soveltamalla Gramin ja Schmidtin ortonormalisointia seuraavasti:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{m} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{m} \rangle \mathbf{u}}{\|\mathbf{m} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{m} \rangle \mathbf{u}\|}, \quad \mathbf{w} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle. \quad (13.1)$$

Näillä vektoreilla on kunkin koordinaatiston kannalla seuraavat komponentit:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k} = b_{11}\mathbf{i}' + b_{12}\mathbf{j}' + b_{13}\mathbf{k}', \\ \mathbf{v} &= a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k} = b_{21}\mathbf{i}' + b_{22}\mathbf{j}' + b_{23}\mathbf{k}', \\ \mathbf{w} &= a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k} = b_{31}\mathbf{i}' + b_{32}\mathbf{j}' + b_{33}\mathbf{k}', \end{aligned} \quad (13.2)$$

jossa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ja $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ ovat vastaavasti Maahan kiinnitetyn ja puhelimen rungon koordinaatistojen ortonormaali kannat.

Näillä määritelmillä nähdään, että matriisit

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

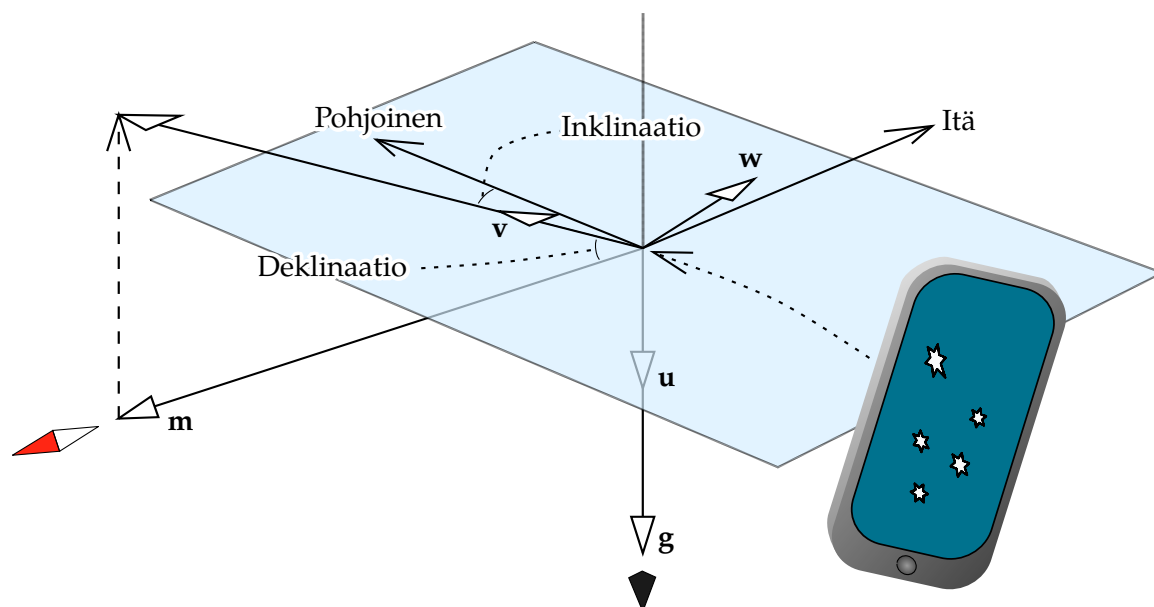
ovat molemmat ortogonaalisia. Kirjoitetaan yhtälö 13.2 muotoon

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} = B^{-1}A \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

Tässä kiertomatriisi $R \stackrel{\text{def}}{=} B^{-1}A = B^T A$ on yksiselitteinen ja laskettavissa.

Yhtälön 13.1 toimivuuden ehto on tietenkin, että magneettinen kenttävektori ja painovoimavektori eivät ole samansuuntaisia: $\mathbf{m} \nparallel \mathbf{g}$, mikä pitää paikkansa kaikkialla paitsi magneettisilla navoilla. Tämä käy järkeen, koska näissä kahdessa paikassa ei magneettinen kompassikaan toimi!





KUVA 13.1. Matkapuhelimen suuntaus kiihtyvyyssmittarin ja magnetometrin avulla.

Yleisemmin kahden riippumattoman vektorin määrittäminen kahdessa eri koordinaatistossa mahdollistaa koordinaatistojen välisen kiertomatriisin määrittämisen. Tulemme näkemään sen myös osiossa 13.4 kahdelle vektorille, jotka määritetään kolmella GNSS-antennilla, jotka eivät ole samalla suoralla.

Kolmen akselin vektoriantureiden kalibrointi on laaja aihe. Tässä tutkitaan kahta tapausta: akseleiden mittakaavojen, suuntien ja ortogonaalisuuden kalibrointia ja mitattavassa vektorissa olevan vakiosiirtymän poiskalibrointia.

13.1.1 Akseleiden mittakaavan ja suunnan kalibrointi

Kolmiakselisen kiihtyvyyssmittarin akselien mittakaavat ja suunnat voidaan kalibroida laboratoriossa. Käytetään paikallisen painovoiman tunnettua vahvuutta ja suuntaa \mathbf{g} . Puhelin asennetaan alustalle ja käännetään siten, että puhelimen kolmesta akselista jokainen osoittaa vuorollaan \mathbf{g} :n suuntaan. Kalibrointiyhtälö on

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_i = G \mathbf{g}_{\beta_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$



TAULU 13.1. Sky Mapin koodi, joka suorittaa tekstissä kuvatun Gramin ja Schmidtin menetelmän matkapuhelimen asennon määrittämiseksi. GitHubin koodivarannosta, [Sky Map Devs](#), [Stardroid](#).

```
/**
 * Calculates local North and Up vectors in terms of the phone's coordinate
 * frame from the magnetic field and accelerometer sensors.
 */
private void calculateLocalNorthAndUpInPhoneCoordsFromSensors() {
    Vector3 magneticNorthPhone;
    Vector3 magneticEastPhone;
    if (useRotationVector) {
        float[] rotationMatrix = new float[9];
        SensorManager.getRotationMatrixFromVector(rotationMatrix, rotationVector);
        // The up and north vectors are the 2nd and 3rd rows of this matrix.
        magneticNorthPhone = new Vector3(rotationMatrix[3], rotationMatrix[4],
            rotationMatrix[5]);
        upPhone = new Vector3(rotationMatrix[6], rotationMatrix[7],
            rotationMatrix[8]);
        magneticEastPhone = new Vector3(rotationMatrix[0], rotationMatrix[1],
            rotationMatrix[2]);
    } else {
        // TODO(johntaylor): we can reduce the number of vector copies done in here.
        g Vector3 down = acceleration.copy();
        u down.normalize();
        // Magnetic field goes *from* North to South, so reverse it.
        Vector3 magneticFieldToNorth = magneticField.copy();
        m magneticFieldToNorth.scale(-1);
        magneticFieldToNorth.normalize();
        // This is the vector to magnetic North *along the ground*.
        magneticNorthPhone = addVectors(magneticFieldToNorth,
            scaleVector(down, -scalarProduct(magneticFieldToNorth, down)));
        v magneticNorthPhone.normalize();
        upPhone = scaleVector(down, -1);
        w magneticEastPhone = vectorProduct(magneticNorthPhone, upPhone);
    }
    // The matrix is orthogonal, so transpose it to find its inverse.
    // Easiest way to do that is to construct it from row vectors instead
    // of column vectors.
    axesPhoneInverseMatrix = new Matrix33(magneticNorthPhone, upPhone,
        magneticEastPhone, false);
}
```

jossa g_x , g_y ja g_z ovat anturin akseleiden raa'at lukemat ja β_i puhelin-
rungan ortonormaalit kannat kussakin kolmesta mittausasennosta.



Saadaan kolme yhtälöä,

$$\begin{bmatrix} g_{x,1} \\ g_{y,1} \\ g_{z,1} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{x,2} \\ g_{y,2} \\ g_{z,2} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{x,3} \\ g_{y,3} \\ g_{z,3} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix},$$

jossa g on todellinen painovoiman kiihtyvyyssarvo eli vertausarvo puhelimen sijainnilla.

Kalibrointimatriisin G ratkaisu on

$$G = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{x,1} & g_{x,2} & g_{x,3} \\ g_{y,1} & g_{y,2} & g_{y,3} \\ g_{z,1} & g_{z,2} & g_{z,3} \end{bmatrix}.$$

Kun kalibrointi on tehty, saadaan kalibroituina mittauksena

$$\mathbf{g}_{\text{kal}} = G^{-1} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}.$$

Kalliimmilla puhelimilla tämä kalibrointi tehdään valmistuksen jälkeen ja kalibrointimatriisi kirjoitetaan laiteohjelmiston lukumuistiin (Zhang *ym.*, 2019).



13.1.2 Vakio vektorisiirtymän kalibrointi

Magneettikentän mittauksessa on ongelmana, että paikallisten häiriöiden takia paikallinen kenttä voi poiketa merkittävästi globaalista mallista. Vielä vakavampi ongelma on *puhelimien generoima magneettikenttä*. Puhelin sisältää magneettisten materiaalien lisäksi sähkövirtoja, jotka tuottavat magneettikenttiä. Ja ne ovat hyvin lähellä²!

Itsegeneroitu kenttä kiertää puhelimen mukana, ulkoinen kenttä ei. Tämä mahdollistaa kenttien erottamisen toisistaan. Koska ohjelmisto ei voi tietää, millaiseen laitekokoonpanoon se on tullut asennetuksi, erottaminen on tehtävä ainakin kerran ja aina silloin, kun epäillään, että itsegeneroitu kenttä on muuttunut.

Olkoon m magneettikentän vahvuus, lukuun ottamatta itse puhelimen tuottamaa osaa, ja anturin kolmen akselin raajat mittaussarvot m_x , m_y ja m_z . Olkoon itsegeneroidun kentän komponentit μ_x , μ_y ja μ_z , jotka tulee estimoida. Silloin

$$m^2 = (m_x - \mu_x)^2 + (m_y - \mu_y)^2 + (m_z - \mu_z)^2 + v,$$

²Vihje: Tarkista, onko suojakotelon kannessa magneetti, joka pitää sen kiinni!



mikä kertoo, että anturin lukemat $\begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}^T$ sijoittuvat pallon pinnalle, jonka säde on m ja keskipiste $\begin{bmatrix} \mu_x & \mu_y & \mu_z \end{bmatrix}^T$.

Kirjoitetaan tämä havaintoyhtälön muotoon:

$$\overbrace{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}^{\ell} + v = \overbrace{m^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2}^{\widehat{M}} + 2m_x\widehat{\mu}_x + 2m_y\widehat{\mu}_y + 2m_z\widehat{\mu}_z.$$

Jokaisen anturimittauksen jäännösvirhe v edustaa, paljonko etäisyys pallon keskipisteestä toiseen potenssiin eroaa pallon säteestä toiseen potenssiin eli m^2 .

Jos on n havaintoa:

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} m_{x,1}^2 + m_{y,1}^2 + m_{z,1}^2 \\ m_{x,2}^2 + m_{y,2}^2 + m_{z,2}^2 \\ \vdots \\ m_{x,n}^2 + m_{y,n}^2 + m_{z,n}^2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2m_{x,1} & 2m_{y,1} & 2m_{z,1} \\ 1 & 2m_{x,2} & 2m_{y,2} & 2m_{z,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2m_{x,n} & 2m_{y,n} & 2m_{z,n} \end{bmatrix}.$$

Tuntemattomien vektori on

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{M} & \widehat{\mu}_x & \widehat{\mu}_y & \widehat{\mu}_z \end{bmatrix}^T.$$

Ratkaisu on

$$\widehat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{\ell},$$

jonka jälkeen

$$\widehat{m}^2 = \widehat{M} + \widehat{\mu}_x^2 + \widehat{\mu}_y^2 + \widehat{\mu}_z^2.$$

Havaintoja tarvitaan mahdollisimman monesta kolmiulotteisesta asennosta, kuten puhelimen valmistajan suosittelema kahdeksikkoliike antaa. Kalibroitu magneettikentän mittaustulos on nyt

$$\mathbf{m}_{\text{kal}} = \begin{bmatrix} m_x - \widehat{\mu}_x \\ m_y - \widehat{\mu}_y \\ m_z - \widehat{\mu}_z \end{bmatrix}.$$



13.1.3 Kiihtyvyyssmittarin ja magnetometrin mittausten yhdistäminen

Painovoimavektori \mathbf{g} on laskettavissa leveysasteesta käyttäen esimerkiksi **GRS80**:n vertausellipsoidin painovoimakaavaa ainakin neljän desimaalin tarkkuudella.



Magneettikentän vektorille \mathbf{m} tilanne ei ole yhtä hyvä. Varsinkin magneettikentän paikallisen suunnan epävarmuus on ongelma. Jos hyväksytään, että mitatun ja kalibroidun painovoimavektorin \mathbf{g}_{kal} suunta on oikea, ainoa mielenkiintoinen lisätieto, jonka mitattu ja kalibroitu magneettikentän vektori \mathbf{m}_{kal} voisi antaa, on atsimuuttikulma pystyakselin ympäri.

Katso yhtälö 13.1: vektorin \mathbf{m} epävarmuus aiheuttaa vain epävarmuutta vektoreissa \mathbf{v} ja \mathbf{w} . Koska molemmat ovat tasossa, joka on kohtisuorassa vektoriin \mathbf{g} , seuraa, että myös epävarmuus rajoittuu tähän tasoon. Ja koska $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ ja $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$, virhe voidaan yksinkertaisesti ilmaista yhtenä kiertokulmana tässä tasossa.

Kahden vektorin \mathbf{g}_{kal} ja \mathbf{m}_{kal} välillä oleva kulma, joka vastaa magneettiseen inkliinaatioon, ei ole kiinnostava puhelimen asennonmäärityksen kannalta. Se kertoo vain magneettikentän paikallisista poikkeamista mallikentästä, esimerkiksi paikallisten magneettisten materiaalien takia.

Saman ilmiön takia magnetometrin antama atsimuutti on todennäköisesti väärä jopa yllä kuvatun sisäisen kalibroinnin jälkeen. Eräs tapa korjata tämä atsimuuttivirhe on sama, jota sovellus *SkyView*³ käyttää ja joka hyödyntää tähtitaivasta. *SkyView* tukee kameran käyttöä, ja käyttäjä näkee samanaikaisesti sekä *SkyView*'n esittämän taivaan että kameran välittämän todellisen taivaan. Yksinkertaisen vasen-oikea-liukusäätimen avulla näkymät saadaan päällekkäin.

Magnetometrin sijasta atsimuutin suuntaamista varten voidaan käyttää kolmiakselista gyroskooppia. Koska gyroskooppi ei käytä ulkoista vertausuuntaa, oikean atsimuutin asettaminen todelliselle taivaalle on tehtävä joka kerta uudestaan. Asetus pysyy voimassa jonkin aikaa gyroskoopin laadusta riippuen.



13.2 Nollanopeuspäivitys

Inertiamittausyksikön sijainnin ja nopeuden tarkkuus huononee aikaa myöten, koska havainnot integroidaan ajassa kahdesti. Eräs tapa pitää sijainnin tarkkuus aisoissa on tehdä säännöllisiä pysähdyksiä ja ilmoittaa yksikön ohjelmistolle, että nopeus on nyt nolla. Näin nopeuden integrointi alkaa taas tyhjästä, mikä keskeyttää virheiden kasautumisen. Tekniikkaa kutsutaan nollanopeuspäivitykseksi eli **ZUPT**.

³*SkyView* on Terminal Eleven LLC:n rekisteröity tavaramerkki.



13.2.1 Kiihtyvyyden epävarmuuden kasautuminen

Kiihtyvyyksmittareissa on sekä satunnaisia että systemaattisia virheitä. *Systemaattiset virheet* voidaan eliminoida järjestelmäkaliibroinnin avulla, jolloin määritetään mittakaava- ja suuntausvirheet sekä mahdollisesti niiden epälinearisuudet. Myös gyroskoopeilla on sekä satunnaisia että systemaattisia virheitä, kuten suuntauksen ryömintä eli käynti.

Vaihtoehtoinen lähestymistapa systemaattisten vaikutusten — kuten antureiden mittakaava- ja suuntausvirheiden sekä gyroskooppien ryöminän — poistamiseksi on niiden *mallinnus*: virheparametrien malliyhtälöt sisällytetään Kalmanin suotimeen.

Kiihtyvyyden satunnaiset virheet tuottavat integroinnin kautta satunnaisia mutta keskenään korreloituja nopeusvirheitä, jotka kasvavat ajan neliöjuuren mukaan:

$$\sigma_v \sim \sigma_a \sqrt{t} \quad (13.3)$$

jossa σ_a on kiihtyvyyden satunnainen epävarmuus, jonka oletetaan olevan valkoista kohinaa. Toisen integroinnin jälkeen sijainnin satunnainen epävarmuus kasvaa ajan potenssin $\frac{3}{2}$ mukaan:

$$\sigma_x \sim \sigma_a t \sqrt{t}. \quad (13.4)$$



13.2.2 Gyroskoopin epävarmuuden kasautuminen

Gyroskoopin suunnan epävarmuuden kasautumista on hankala analysoida. Oletetaan, että suuntavirhe käyttäytyy satunnaiskulun tavoin:

$$\sigma_\theta \sim \sigma_\omega \sqrt{t},$$

jossa σ_ω on kulmanopeuden eli pyörähdysakselin suunnan kääntämisenopeuden $\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$ satunnainen epävarmuus. Kulmanopeuden oletetaan olevan sama kuin valkoinen kohina, jolloin akselin suuntakulma $\theta(t)$ on satunnaiskulku.

Gyroskoopin suunnan epävarmuuden vaikutus nopeuden ja paikan epävarmuuteen ei ole suoraviivaista: se riippuu matkan skenaariosta. Yksinkertainen skenaario on tasainen kiihtyminen pysähdyksestä risteilynopeuteen v_c , joka saavutetaan ajan t_c kuluttua.

Kiihtymisvaiheessa vaikutus kiihtyvyydsvektoriin on

$$\sigma_{a,\theta} \sim a \sigma_\theta \sim a \sigma_\omega \sqrt{t},$$



ja vaikutus nopeusvektoriin integroinnin kautta

$$\sigma_{v,\theta} \sim a \sigma_\omega t \sqrt{t} \sim v \sigma_\omega \sqrt{t}.$$

Tämä vaikutus toimii poikittaissuunnassa sekä kiihtyvyys- että nopeusvektorin tapauksessa. Alkukiihtyvyys on matkan suunnassa, kuten myös matkan aikainen risteilynopeus. Siis myös sijainnille saadaan

$$\sigma_{x,\theta} \sim v \sigma_\omega t \sqrt{t} \sim a \sigma_\omega t^2 \sqrt{t}.$$

Nähdään, että riippuvuus ajasta on peräti potenssin $\frac{5}{2}$ mukainen.

Kiihtymisvaiheen kesto on kuitenkin rajallinen. Jos kiihtymisen jälkeen tulee risteilyvaihe, risteilynopeuden epävarmuus vaikuttaa ajassa lineaarisesti:

$$\sigma_{v,\theta} \sim v_c \sigma_\omega \sqrt{t_c} \sim a \sigma_\omega t_c \sqrt{t_c} \implies \sigma_{x,\theta} \sim v_c \sigma_\omega t \sqrt{t_c} \sim a \sigma_\omega t t_c \sqrt{t_c}.$$

Huomaa, että kiihtyvyyden puuttuminen aiheuttaa sijainnin epävarmuuden kasvun lineaarisesti ajassa. Yleisessä skenaariossa, jossa ajoneuvo kiihdyttää koko matkan ajan, esimerkiksi muuttaa kulkusuuntaa, epävarmuus kasvaa nopeammin.



13.2.3 Nollanopeuspäivitysten suoritus

Nollanopeuspäivitysten suorittaminen aikavälillä Δt olettaen, että eri päivitysvälien nopeusvirheet ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan, antaa (yhtälöt 13.3 ja 13.4):

$$\sigma_v \sim \sigma_a \sqrt{\Delta t} \implies \sigma_x \sim (\sigma_a \Delta t \sqrt{\Delta t}) \sqrt{n} = \sigma_a \Delta t \sqrt{t}$$

jossa n on nollanopeuspäivitysten lukumäärä: $t = n \Delta t$.

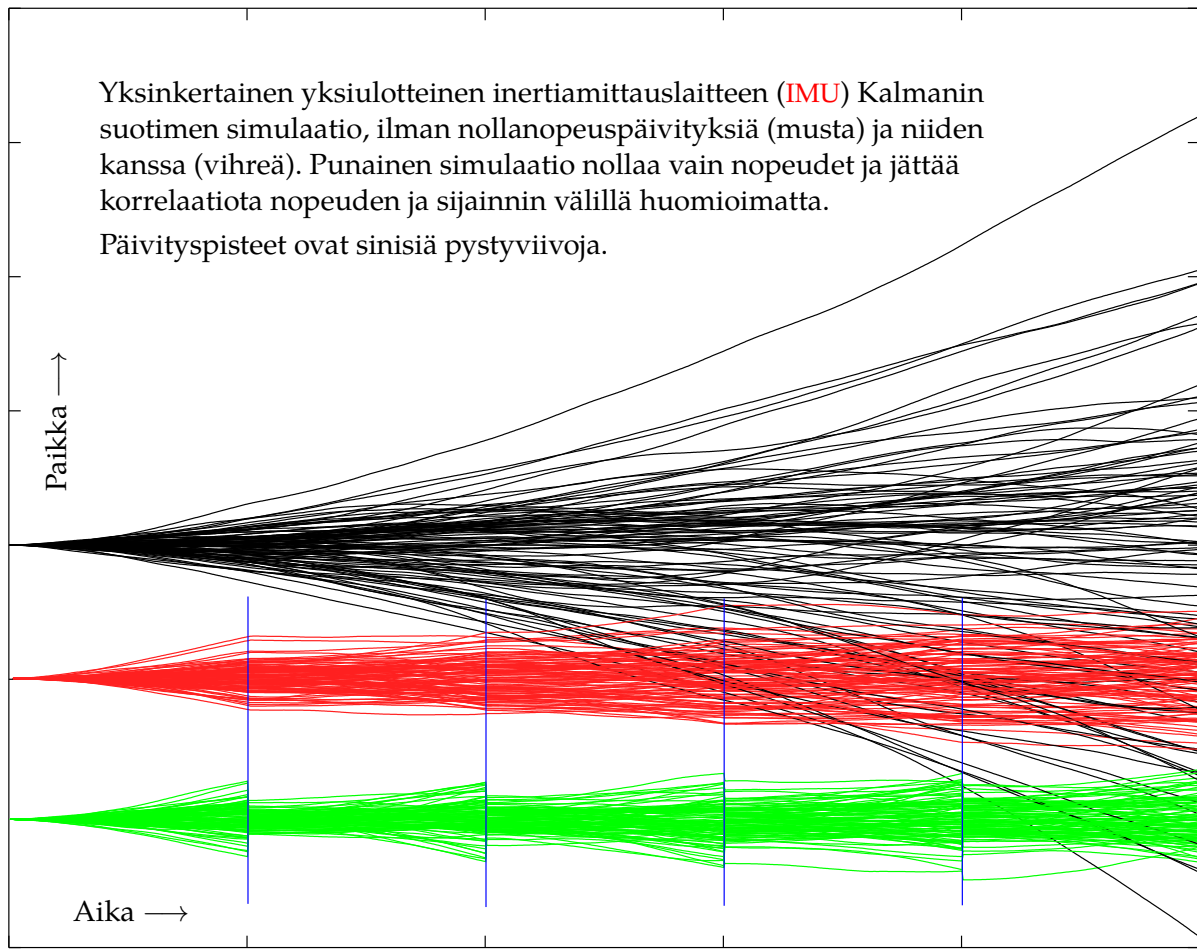
Nähdään, että sijainnin epävarmuuden kasvu, joka aiemmin tapahtui kuluneen ajan potenssin $\frac{3}{2}$ mukaan, on nyt laskenut ajan potenssiin $\frac{1}{2}$!

Kuvassa 13.2 nähdään yksinkertaisen yksiulotteisen malli-inertia-mittausyksikön simulaatiolasku, jossa tämä peruskäyttäytyminen on nähtävissä. Malli on⁴

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{x}_{k+1} \\ \underline{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_k^{k+1} \\ 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{w}_k^{k+1} \\ 0 \\ \underline{n}_a \Delta t \end{bmatrix},$$

jossa \underline{n}_a on satunnainen ei-korreloitu virhe (valkoinen kohina), joka edustaa kiihtyvyyssmittarin kohinaa. Piirretty suure on $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$, yksiulotteinen sijainti. $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ on aika-askel.





KUVA 13.2. Yksinkertainen Kalmanin suodin ensin ilman nollanopeuspäivityksiä ja sitten niiden kanssa.

Nollanopeuspäivitys nollaa ajoneuvon nopeuden epävarmuuden. Se ei paranna muiden tilavektorin alkioiden, kuten sijainnin tai gyroskoopin suunnan, epävarmuutta — ei ainakaan suoraan. Huomaa kuitenkin, että kaikki tilavektorin alkio on kytketty toisiinsa Kalmanin suotimessa ja niiden estimaattorit korreloivat keskenään. Täydellinen nollanopeuspäivitys on oikeasti Kalmanin päivitysaskel.

Jos gyroskooppi on muuttanut akselinsa suuntaa, muutos ilmenee sulkuvirheenä suotimen ylläpitämän nopeusvektorin estimaatin $\mathbf{v}^-(t)$

⁴Vastaava differentiaali- eli jatkuvan ajan malli on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_a \end{bmatrix}.$$

ja päivitysaskeleen eli nollanopeuspäivityksen antaman saman vektorin ”nollahavainnon” välillä. Päivitysaskeleessa siis nollataan nopeus ja lisäksi päivitetään sekä sijainnin $\mathbf{x}^-(t)$ että gyroskoopin akselin suunnan $\theta^-(t)$ estimaatit, mikä pienentää niiden epävarmuuden. Kuvassa 13.2 näkyy tämän vaikutus sijaintiin, kun verrataan vihreitä käyriä punaisten kanssa.



13.3 GNSS:n ja IMU:n integrointi

Tämä on *heterogeenisen* anturifuusion esimerkki.

Osiossa 5.2 esitetty inertiamittausyksikkö (IMU) sisältää kolme kiihtyvyyssmittaria ja kolme gyroskooppia. Niiden avulla mittausyksikkö voi seurata omia kierto- ja lineaarisia liikkeitä. Paikannusratkaisu saadaan integroimalla mitattu kiihtyvyys kahdesti peräkkäin, mikä tuottaa ensin nopeuden ja sitten sijainnin. Ajan myötä ratkaisu huononee vähitellen.

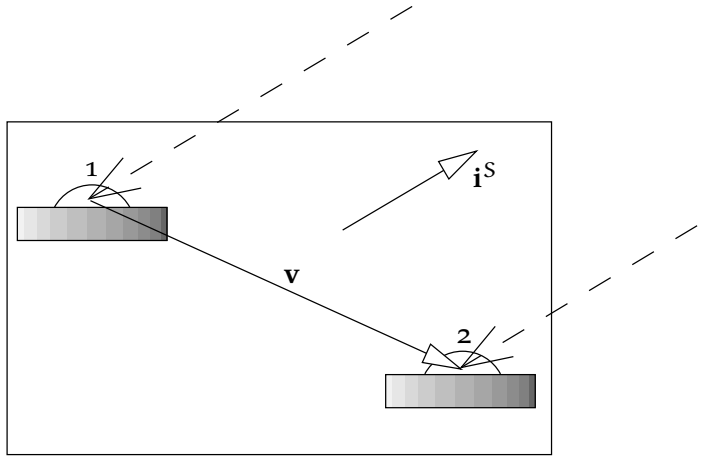
Huononemista voidaan hallita, jos säännöllisin välein tehdään ”oikea” paikannus, esimerkiksi GNSS:n avulla. Näin voidaan rakentaa järjestelmä, joka säilyttää paikannuksen tarkkuuden, vaikka GNSS-signaali on katkonainen. Tämä on tilanne esimerkiksi tunneleissa, siltojen alla, korkeiden rakenteiden lähellä tai sisätiloissa.

Samalla saatavilla on myös laitteiston tarkka asento. GNSS ei pysty siihen yksin. Toisaalta GNSS voi kiihtyvyyksien läsnäollessa havaita ja poistaa inertialaitteen pitkäaikaista suuntauksen ryömintää. Mainio esimerkki tästä on IMU:n ja GNSS:n integroitu käyttö ilmakuvauksessa tai ilmalaserkeilauksessa: jokainen 180 asteen käänös lentoratojen välillä tarjoaa kiihtyvyysvektorin, jonka sekä inertiamittausyksikkö että GNSS-vastaanotin ”näkevät” ja joka kytkee molempien kojeiden akselikehykset yhteen. Tämä tekee asennolle sen, minkä nollanopeuspäivitykset tekevät sijainnille, katso osio 13.2.

Esimerkki integroidusta laitteistosta on NovAtel SPAN^{®5}, Synchronized Position Attitude Navigation, (Hexagon, SPAN GNSS Inertial Navigation Systems).

Näiden laitteiden mittaustarkkuus on vaikuttava: huippulaatuisen mekaanisen gyroskoopin pyörimisakselin vakaus voi olla luokkaa 0.0001 °/h.

⁵SPAN on NovAtel Inc:n rekisteröity tavaramerkki.



KUVA 13.3. Asennonmittaus GNSS:llä.



13.4 Asennonmittaus GNSS:llä

GNSS:n moniantennijärjestelmän käyttö asennon määrittämisessä on *homogeenisen* anturifuusion esimerkki.

GNSS-järjestelmällä voidaan määrittää kulkuneuvon asento käyttämällä useita — vähintään kolmea — eri antennia. Käytetty menetelmä on tosiaikainen kinemaattinen paikannus hyvin lyhyellä vektorilla. Kulkuneuvon suunta voidaan määrittää kahdella antennilla, jotka on asennettu vaakasuoraan. Kolmiulotteinen asennonmäärittäminen vaatii kolmannen antennin, joka ei saa olla samalla linjalla.

Kuten kuvasta 13.3 näkyy, sama satelliitti havaitaan yhtä aikaa kahdesta eri antennista. Mittasuure on erotus kahden kantoaallon vaihemittauksen välillä. Yhtälön 8.4 perusteella raakamittaus metreissä on

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \frac{\phi}{2\pi},$$

ja erotusmittaus antennien 1 ja 2 välillä satelliittiin S on

$$\Delta P^S = P_2^S - P_1^S = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}^S \rangle + N^S \lambda,$$

jossa \mathbf{v} on antennien välinen vektori ja \mathbf{i}^S on käytetyn satelliitin suuntavektori, yksikkövektori eli $\|\mathbf{i}^S\| = 1$. Luku N^S on kokonaisluku, joka edustaa havaintosuureen moniselitteisyyttä eli kokonaistuntematonta.

Kirjoitetaan tämä uudelleen redukoimalla havaintosuure väliin $[0, \lambda)$:

$$\Delta P^S \bmod \lambda = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}^S \rangle + \bar{N}^S \lambda.$$

Tästä on ratkaistava yhtä aikaa vektori \mathbf{v} ja kokonaistuntematon \bar{N}^S . Vektorin ratkaiseminen vaatii vähintään kolmen eri satelliitin havaintoja.



Silloin arvot \bar{N} jäävät vielä auki:

$$\Delta P^{(1)} \bmod \lambda = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}^{(1)} \rangle + \bar{N}^{(1)} \lambda,$$

$$\Delta P^{(2)} \bmod \lambda = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}^{(2)} \rangle + \bar{N}^{(2)} \lambda,$$

$$\Delta P^{(3)} \bmod \lambda = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}^{(3)} \rangle + \bar{N}^{(3)} \lambda.$$

Arvoista $\bar{N}^{(1)}, \bar{N}^{(2)}, \bar{N}^{(3)}$ tiedämme ainakin, että ne eivät voi olla kovin suuria, jos vektori \mathbf{v} on lyhyt: kun $\Delta P^S \bmod \lambda$ on välillä $[0, \lambda)$ ja $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}^S \rangle$ välillä $[-\|\mathbf{v}\|, \|\mathbf{v}\|]$, voi \bar{N}^S olla vain välillä $[-\|\mathbf{v}\|/\lambda, \|\mathbf{v}\|/\lambda + 1]$. Jos vektori on esimerkiksi 2 m pitkä ja aallonpituus on 24 cm, ovat ainoat mahdolliset \bar{N}^S :n arvot $-8, -7, \dots, +8, +9$.

Näin saadaan ratkaisu:

- 1) Jos näkyy yli kolme satelliittia, valitaan niistä kolme, jotka yhdessä tuottavat mahdollisimman hyvän geometrian. Tämä on helppoa: käy vain läpi kaikki kolmikot ja laske niiden determinanttiarvo $\langle \mathbf{i}^{(1)} \cdot \langle \mathbf{i}^{(2)} \times \mathbf{i}^{(3)} \rangle \rangle$. Suurin itseisarvo voittaa. Jos näkyvissä on esimerkiksi kymmenen satelliittia, on laskettava

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

determinanttia.

- 2) Kokeile kaikki mahdolliset \bar{N}^S -arvot kolmelle satelliitille 1, 2 ja 3. Laske jokaiselle yhdistelmälle vektoriratkaisu \mathbf{v} . Laskettavien ratkaisujen kokonaismäärä on esimerkkitapauksessa $18^3 = 5832$.
- 3) Jos vektori on esimerkiksi 20 m pitkä, on laskettavien ratkaisujen kokonaismäärä jo $168^3 = 4,7$ miljoona. Se vaatisi merkittävästi laskentaresursseja. Toisaalta jos käytettävissä on kahden taajuuden koje, tarjolla on leveäkujamittaus eli *widelaning*, jonka tehollinen aallonpituus on 86 cm. Silloin tarvitaan ainoastaan $48^3 = 110\,592$ eri ratkaisua.
- 4) Tämän jälkeen lasketaan jokaisesta näin löytyneestä alustavasta ratkaisusta $\hat{\mathbf{v}}(\bar{N}^{(1)}, \bar{N}^{(2)}, \bar{N}^{(3)})$ antennien välinen etäisyys $\|\hat{\mathbf{v}}\|$ ja tutkitaan, onko se riittävän lähellä tunnettua antennien välistä etäisyyttä. Ratkaisut, jotka eivät täytä tätä ehtoa, voidaan hylätä heti.



- 5) Tämän jälkeen lasketaan muiden satelliittien havaintosuureet:

$$\begin{aligned}\Delta P^{(4)} \bmod \lambda &= \langle \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{i}^{(4)} \rangle + \bar{N}^{(4)} \lambda, \\ \Delta P^{(5)} \bmod \lambda &= \langle \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{i}^{(5)} \rangle + \bar{N}^{(5)} \lambda, \\ &\dots \\ \Delta P^{(n)} \bmod \lambda &= \langle \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{i}^{(n)} \rangle + \bar{N}^{(n)} \lambda.\end{aligned}$$

Jokainen vasemman puolen havaintoarvo pitää täsmentää havaintoepävarmuuden rajoissa vastaavan oikean puolen kanssa yhdelle arvolle \bar{N} . Tämä onnistuu yleensä *kaikille* satelliiteille $S = 4, \dots, n$ vain yhden alustavan ratkaisun kohdalla.

- 6) Näin löytyneen arvojoukon \bar{N}^S , $S = 1, \dots, n$ avulla suoritetaan *lopullinen tasoitus* optimaalisen vektorin $\hat{\mathbf{v}}$ laskemiseksi *kaikista* havainnoista.
- 7) Kun kojeen kulkuneuvo liikkuu, niin kauan kuin ei tule vaihekatkoja, arvot \bar{N}^S pysyvät ennallaan. Silloin voidaan ratkaista $\hat{\mathbf{v}}$ jatkuvasti tosiajassa kerätyistä havainnoista.

13.5 Moderni radionavigointi

Tukiasemien verkkojen, kuten mobiiliverkkojen ja langattomien lähiverkkojen (**WLAN**) leviäminen on tehnyt radionavigoinnista kahdessa ulottuvuudessa Maan pinnalla uudelleen käytännöllisen menetelmän. Käytetyt tekniikat ovat:

- Solutunnus. Tässä sijainti rajataan sen tiedon avulla, mitkä tukiasemat ovat navigaattorin ulottuvilla. Tämä perustuu siihen, että jokainen tukiasema, ja joskus jokainen suuntasektori aseman ympärillä, lähettää tunnistetietoja. Menetelmä on epätarkka kaupunkien ulkopuolella ja hieman tarkempi niiden sisällä.
- Signaalin vahvuus. Tarvitaan vähintään kaksi tukiasemaa. Tarkkuus on tavallisesti heikko.
- Matkojen erotus. Kyseessä on samantyyppinen menetelmä kuin mennyt **Decca** ja vastaavia vanhoja merenkulun radionavigointijärjestelmiä. Tätä kutsutaan myös saapumisaikaeron eli *time-difference-of-arrival* (**TDOA**) -menetelmäksi, multilateraatioksi tai hyperboliseksi navigoinniksi. Sijainnin määrittäminen tällä menetelmällä edellyttää kolmen tukiaseman käyttöä.
- Matka. Tätä kutsutaan saapumisajan eli *time-of-arrival* (**TOA**)

-menetelmäksi. Se edellyttää signaalin kulkua navigaattorista jokaiseen tukiasemaan ja takaisin. Koska mobiiliverkot käyttävät aikajakokanavointia (**TDMA**, *time-division multiple access*), verkon sisäänrakennettu menetelmä on ajastusennakko eli *timing advance*. Sitä tarvitaan eri etäisyyksillä tukiasemalta olevien mobiilikäyttäjien aikaikkunoiden synkronointiin.

Lisäksi kun paikannetaan matkapuhelimia **GNSS**-menetelmällä, tukiasemaverkko voi olla avuksi, esimerkiksi tarjoamalla satelliittien ratatiedot nopeammin kuin satelliitit itse lähettävät niitä. Satelliittien lähettämän navigointiviestin bittinopeus on vain 50 bittiä sekunnissa. Mobiiliverkon käyttöä tähän kutsutaan nimellä avustettu **GNSS** eli **A-GNSS**.



13.6 Mikroelektroniset liikeanturit (MEMS)

Mikroelektroniset liikeanturit (**MEMS**) ovat pieniä ja edullisia kiihtyvyyssmittareita ja gyroskooppeja. Valmistusprosessiin kuuluu tietokoneen mikropiirien valmistuksesta tunnettu optinen litografia ja mikrotyöstö.

MEMS-antureiden lukeminen tapahtuu usein kapasitiivisesti. Sekä kiihtyvyyssmittareissa että gyroskoopeissa pienet kiinteät rakenteet deformatuvat elastisesti. Kaksi johdinta, joiden välillä on ilma- tai tyhjiörako, muodostavat kondensaattorin, jonka kapasitanssi vaihtelee raon leveyden mukaan. Yhdistämällä ne induktanssin (käämin) kanssa piiriksi, muodostetaan oskillaattori, jonka taajuus voidaan mitata tarkasti. Katso [Wikipedia](#), [Värähtelypiiri](#).

MEMS-magnetometri perustuu yleensä Hallin⁶ ilmiöön: magneetikentässä oleva johdin, jossa kulkee sähkövirta, tuottaa sivuttaisen potentiaalieron. Jos magneetikentän suunta on x ja virran suunta y , potentiaalieron suunta on z . Katso [Wikipedia](#), [Hallin ilmiö](#).



13.6.1 Kiihtyvyyssmittarit

Nämä piirit mittaavat kiihtyvyyttä mittaamalla esimerkiksi kapasitiivisesti pienen koemassan liikkeen kiihtyvyyden aiheuttaman pseudo-voiman vaikutuksesta. Eräs malli, Analog Devicesin ADXL103, pystyy mittaamaan kiihtyvyyksiä alle $1,7\text{ g}$ (17 m/s^2) erotuskyvyllä 1 mg eli 1000 mGal .

Käsityksen siitä, mitä tämä tarkoittaa, saa miettimällä, että 1000

⁶Edwin Herbert Hall (1855–1938) oli amerikkalainen fyysikko.

milligalin kiihtyvyys minuutin aikana tuottaa 18 metrin siirtymän. Kallistusmittarina käytettynä se vastaa 3,4 kaariminuuttin kallistusta.

Itse laitteen *herkkyys* voi olla kalibroinnin jälkeen vieläkin parempi. Se myös kestää pudottamisen vaikkapa betonilattiaan, jolloin hetkellinen kiihtyvyys on 3500 g! Mikropiirin koko on $5 \times 5 \times 2$ mm ([Analog Devices](#)).

Samanlaisia laitteita on myös ammuttu tykistä, ja niitä käytetään ”älyammuksissa”.

Hinnat ovat nykyään (2020) noin euron kappale jopa kolmiakselisille antureille. Kooltaan ne ovat muutaman millimetrin. Sovellusalueita ovat esimerkiksi auton turvatyynyn laukaisuanturit ja kannettavan mikrotietokoneen kovalevyn putoamissuojan laukaisuanturit, joiden laaja käyttö on pudottanut hintoja.



13.6.2 Pyörähdysanturit

Mikroelektroniset gyroskoopit eli pyörähdysanturit perustuvat tavallisesti ääniraudan tapaisen rakenteen värähtelyyn. Katso [Wikipedia](#), [Vibrating structure gyroscope](#). Kuten pyörivä kappale, myös värähtelevä kappale yrittää pysyä samassa tasossa. Siksi koko laitteen pyörähdysliike aiheuttaa vääntöä, niin sanottua *coriolisvoimaa*, joka mitataan esimerkiksi kapasitiivisesti. Mittausarvo on verrannollinen pyörähdysliikkeen kulmanopeuteen. Katso kuva [13.4](#). Kolmen akselin eli kolmen vapausasteen laite sisältää kolme yhden akselin komponenttia.

Nämä laitteet pystyvät $\pm 0,1$ % tarkkuuteen, mikä on noin kuusi suuruusluokkaa heikompia kuin pyörivän roottorin gyroskooppi tai lasergyroskooppi, katso osio [13.3](#) ja alaosio [5.3.1](#).

Sovellusalueet ovat videokameroiden kuvan vakauttaminen, autojen ohjausvasteen parantaminen, robotiikka, droonit ([UAV](#):t eli *unmanned aerial vehicles*) ja monet muut.

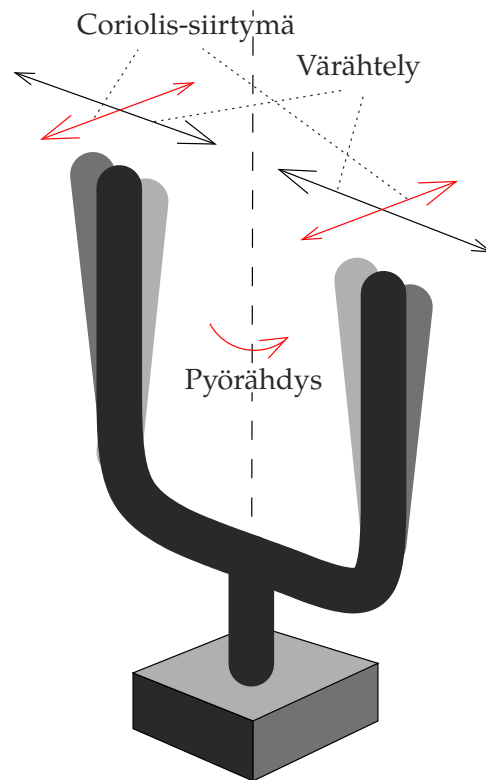


13.7 Jalankulkijanavigointi

Kun jalankulkija käyttää matkapuhelinta navigointiin, puhelimesta oleva sovellus olettaa, että näytön yläreuna osoittaa kävelyn suuntaan. Tähän intuitiiviseen vaatimukseen tottuu nopeasti: jos pitää puhelinta tällä tavalla, puhelimen näytössä näkyvä kartta suuntautuu ympäröivän maiseman mukaan.

Tämä edellyttää kuitenkin käyttäjän liikkumista vähintään muutamien metrien verran: [GNSS](#):n havaitsema maaston liikevektori sijoitetaan





KUVA 13.4. **MEMS**-pyörähdysanturin periaate. Jos alusta pyörii, aiheuttaa ääniraudan värähtely (kuvassa vasen-oikea) coriolisvoiman kautta jaksollisen siirtymän, joka mitataan kapasitiivisesti.



karttaan, ja sitä käytetään kääntämään karttakuvaa oikein⁷.

Sovellettaessa inertianavigointiteknologiaa henkilökohtaiseen navigointiin, *nollanopeuspäivityksen* periaatetta on käytetty henkilökohtaisen navigoinnin laitteissa, joissa inertiamittausyksikkö (**IMU**) on asennettu saappaisiin. Aina kun saapas astuu maahan, Kalmanin suotimen sisältämä nopeusarvo nollataan ja muut tilavektorin alkioit päivitetään.

Mielenkiintoinen sovellus on palomiesten, tarkemmin savusukeltajien, ohjaaminen savun täyttämässä talossa. Tässä yhtydessä inertianavigoinnin itsenäinen luonne ja riippumattomuus ulkoisista signaaleista ovat tärkeitä ominaisuuksia. Esimerkiksi **Godha ym. (2006)**.

⁷Sama pätee autonavigointiin: auton on liikutettava, ennen kuin karttakuva voidaan suunnata oikein. Tämä voi hyvinkin aiheuttaa sen, että ensimmäinen ohje kuljettajalle on suorittaa 180 asteen käänös. Tässä oletetaan, että sovellus ei käytä sisäänrakennettua kompassia eli magnetometriä suuntaamiseen, jos sellainen on.



13.8 Sisätilanavigointi

Sisätilanavigointi on laaja ja nopeasti kehittyvä ala ([Wikipedia](#), [Indoor positioning system](#)), ja siksi tämä osio on vain kevyt aiheen pinnan raapaisu.

Sisätiloissa [GNSS](#):n saatavuutta ei voida olettaa, ja yleensä se puuttuu. Muita tukiasematyyppejä on kuitenkin joko käytettävissä ([WLAN](#), langaton lähiverkko) tai ne voidaan asentaa. Paikannukseen käytetyt tekniikat ovat hyvin samanlaisia kuin perinteiset radiopaikannustekniikat, kuten [Decca](#). Käytettävissä olevat lähestymistavat ovat samanlaisia kuin ne, jotka käyttävät matkapuhelinverkon tukiasemia, katso osio [13.5](#).

Pseudoliitit ovat laitteita, jotka lähettävät radiotaajuuksia ja -signaaleja [GNSS](#)-satelliittien tavoin, mutta jotka on asennettu Maan päälle. Ne lähettävät kantoaaltoa, joka on moduloitu samanlaisella näennäissatunnaiskoodilla ([PRN](#)) kuin se, mitä [GNSS](#)-satelliitit lähettävät. Esimerkiksi [Zhao ym. \(2018\)](#).

Akustista paikannusta on tutkittu kokouksissa, joissa puhujat voidaan paikantaa ja sitä kautta ohjata esimerkiksi kameroita ja suuntamikrofoneja. Tämä on erityisen arvokasta, jos kokouksia suoratoistetaan Internetin välityksellä tai osa osallistujista käyttää Internetin kokousalustoja, kuten Adobe^{®8} Connect^{™9} tai Microsoft Teams^{®10}. Kuvaus ja lisäviitteet antaa [Parviainen \(2016\)](#).

Paikannukseen voidaan käyttää magneettikentän, langattoman lähiverkon ([WLAN](#)) tai Bluetooth^{®11}-signaalin vahvuutta. Talon sisällä magneettikenttä vaihtelee epäsäännöllisesti rakennusmateriaalien magneettisten ominaisuuksien takia. Sama pätee langattoman lähiverkon signaalien tehoarvoihin. Magneettikenttää ja lähiverkon signaaleja voidaan käyttää paikannukseen edellyttäen, että niistä on ensin tehty koko taloa kattava ”sormenjälkikartta”. Katso esimerkiksi [Chen ym. \(2013\)](#); [Liu ym. \(2017\)](#); [Mazlan ym. \(2017\)](#). Haittapuolena on, että kartoitus on toistettava säännöllisesti, varsinkin jos talon sisustukseen tehdään muutoksia.

⁸ Adobe on Adobe Systems Incorporatedin rekisteröity tavaramerkki.

⁹ Connect on Adobe Systems Incorporatedin tavaramerkki.

¹⁰ Microsoft Teams on Microsoft Corporationin rekisteröity tavaramerkki.

¹¹ Bluetooth on The Bluetooth Special Interest Groupin rekisteröity tavaramerkki.

Inertiamittausanturit ovat hyödyllisiä sisätilanavigoinnissa joko yksin tai anturifuusion yhteydessä. Suurin etu on riippumattomuus ulkoisista signaaleista. Koska sisätilanavigointi on useimmiten myös jalankulkijanavigointia, nollanopeuspäivitystekniikka on hyödyllistä.

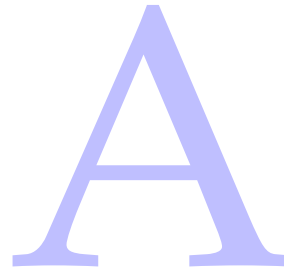


Olenko ymmärtänyt tämän?

- 1) Miten **MEMS**-pyörähdysanturi toimii?
- 2) Kuinka **MEMS**-magnetometri toimii? Miksi se on kalibroitava, jos sitä käytetään matkapuhelimessa? Miten kalibrointi tehdään?
- 3) Kuinka matkapuhelin määrittää asentonsa *Sky Map* -sovelluksessa tähtitaivaaseen nähden?
- 4) Miksi (teoreettinen) matkapuhelimen hyrräkompassi ei toimisi, kun puhelinta pidetään kädessä?
- 5) Miten asennonmäärittäminen **GNSS**:llä toimii?
- 6) Mitkä ovat mobiilitukiasemia käyttävän nykyradionavigoinnin neljä eri toimintaperiaatetta?
- 7) Miksi inertianavigoinnin ja **GNSS**-navigoinnin integrointi on houkuttelevaa?
- 8) Miksi nollanopeuspäivityksistä on hyötyä?
- 9) Saapumisajan (**TOA**) menetelmässä tarvitaan vähintään kaksi tukiasemaa. Onko yksiselitteinen paikannus mahdollista vain kahdella tukiasemalla?
- 10) Mitä sisätilanavigointimenetelmiä on olemassa?
- 11) Miten *matkamittari* voidaan integroida maa-ajoneuvojen navigointijärjestelmään? Mitä etuja se tarjoaa?
- 12) Miten lähteessä **James W. Fox (2018)** kuvattua *päivänvalotallenninta* voidaan käyttää leveys- ja pituusasteen määrittämiseksi ajan funktiona? Milloin tämä epäonnistuu?



Tehon spektraalitiheys on ei-negatiivinen



Väitteen näyttäminen toteen perustuu havaintoon, että autokovarianssifunktion voidaan katsoa edustavan varianssimatriisia, joka on aina symmetrinen ja positiivisesti definiitti.

Olkoon $A_x(t, t') = A_x(\Delta t)$, $\Delta t = t' - t$, jaksollisen signaalin $x(t)$ autokovarianssifunktio, jonka jakso on T . Valitaan signaalin otospisteet väliajoin δt , kun $T = N \delta t$ ja N on otospisteiden lukumäärä. Nyt funktio $A_x(t_j, t'_k)$, $j, k = 0, \dots, N-1$ täyttää kaikkien pisteiden yhteisen varianssimatriisin:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A_x(t_0, t'_0) & A_x(t_0, t'_1) & A_x(t_0, t'_2) & & \\ A_x(t_1, t'_0) & A_x(t_1, t'_1) & A_x(t_1, t'_2) & & \\ A_x(t_2, t'_0) & A_x(t_2, t'_1) & A_x(t_2, t'_2) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_x(t_{N-1}, t'_{N-1}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_x(0) & A_x(\delta t) & A_x(2\delta t) & & \\ A_x(-\delta t) & A_x(0) & A_x(\delta t) & & \\ A_x(-2\delta t) & A_x(-\delta t) & A_x(0) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_x(0) \end{bmatrix} =$$

$$= A_x((k-j)\delta t), j, k = 0, \dots, N-1,$$

jossa stationaarisuus on oletettu. Nähdään, että tässä tapauksessa matriisi Σ on Toeplitz-sirkulantti¹, mikä tarkoittaa, että kaikki rivit ja sarakkeet ovat sirkulaarisesti siirrettyjä kopioita toisistaan.

Seuraavaksi rakennetaan vektori c , joka on tämän näköinen:

$$c(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & e^{2\pi i f \cdot \delta t} & e^{2\pi i f \cdot 2\delta t} & e^{2\pi i f \cdot 3\delta t} & \dots & e^{2\pi i f \cdot (N-1)\delta t} \end{bmatrix}.$$

¹Otto Toeplitz (1881–1940) oli juutalaissaksalainen matemaatikko sekä matematiikan historioitsija ja popularisoija.

Lasketaan matriisi-ilmaisu

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta t}{N} \mathbf{c}(f) \Sigma \mathbf{c}^\dagger(f) &= \frac{\delta t}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i f \cdot j \delta t} A_x((k-j) \delta t) e^{-2\pi i f \cdot k \delta t} = \\
 &= \frac{\delta t}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i f \cdot (k-j) \delta t} A_x((k-j) \delta t) = \\
 &= \delta t \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{-2\pi i f \cdot m \delta t} A_x(m \delta t) = \sum_{m=0}^{N-1} A_x(\Delta t) e^{-2\pi i f \Delta t} \cdot \delta t, \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

jossa $\Delta t = m \delta t$. Huomaa sekä eksponenttifunktioiden että funktion A_x jaksollisuus: $k - j$ voidaan tulkita moduloilmaisuksi $(k - j) \bmod N$.

Koska neliöllinen muoto yhtälön A.1 vasemmalla puolella on hermiittinen ja sisältää positiivisesti definiitin hermiittisen matriisin Σ (siis $\Sigma = \Sigma^\dagger$), seuraa, että sen on oltava ei-negatiivinen kaikille argumentin f arvoille.

Yhtälön A.1 oikea puoli sisältää funktion $A_x(\Delta t) = A_x(t)$ diskreetin Fourier'n ympyrämuunnoksen. Limiitissä $T \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, \delta t \rightarrow 0$ oikea puoli lähentää integraalia 2.31,

$$A_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) e^{-2\pi i f t} dt,$$

johon siis pätee sama: se on ei-negatiivinen kaikille arvoille f .



M-jonot ja Goldin koodit

B

Maksimipituuden bittijono eli *m-jono* voidaan määritellä sen generointimekanismin avulla, katso kuva 7.8:

$$\begin{aligned}b_1(i) &= b_3(i-1) \oplus b_4(i-1), \\b_2(i) &= b_1(i-1), \\b_3(i) &= b_2(i-1), \\b_4(i) &= b_3(i-1).\end{aligned}$$

Nämä siirtorekisterin bitit voidaan samaistaa jonon bittien kanssa seuraavasti:

$$\begin{aligned}x(i) &= b_4(i), \\x(i+1) &= b_3(i), \\x(i+2) &= b_2(i), \\x(i+3) &= b_1(i).\end{aligned}$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned}x(i+3) &= b_1(i) = b_3(i-1) \oplus b_4(i-1) = x(i) \oplus x(i-1) \\&\implies x(i+4) = x(i+1) \oplus x(i), \quad (\text{B.1})\end{aligned}$$

mikä generoi suoraan jonon x .

Tämä pätee rekisterin 7.8 geometrialle. Yleisessä tapauksessa kirjoitetaan

$$x(i+n) = \bigoplus_{\substack{k=0 \\ a(k)=1}}^{n-1} x(i+k), \quad (\text{B.2})$$

jossa $a(k) \in \{0, 1\}$, $k = 0, \dots, n-1$ ovat bittiarvoja, jotka kertovat, mitkä takaisinkytkennät eli "hanat" rekisteri sisältää.

Tässä **XOR**-operaattori \oplus voidaan ymmärtää hyödyllisesti *modulo-2-yhteenlaskuna*: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ ja $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Sillä on kaikki yhteenlaskun kauniit ominaisuudet, kuten vaihdannaisuus $x \oplus y = y \oplus x$ ja liitännäisyys $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

Yhtälö **B.1** on *lineaarinen*. Tämä merkitsee, että jos yhtälö pätee jonolle x ja jonolle y , se pätee myös niiden summalle $z = x \oplus y$:

$$\begin{aligned} \overbrace{x(i+4) \oplus y(i+4)}^{z(i+4)} &= (x(i+1) \oplus x(i)) \oplus (y(i+1) \oplus y(i)) = \\ &= \overbrace{(x(i+1) \oplus y(i+1))}^{z(i+1)} \oplus \overbrace{(x(i) \oplus y(i))}^{z(i)}, \end{aligned}$$

\oplus -operaattorin liitännäisyyden ja vaihdannaisuuden ansiosta. Jotta voit arvostaa tätä intuitiivisesti, korvaa symboli \oplus — ”syklinen plussa” — tavallisella plus-merkillä $+$.

Tämä yleistyy suoraviivaisesti yhtälöön **B.2**, koska on selvää, että

$$\bigoplus_{\substack{k=0 \\ a(k)=1}}^{n-1} (x(i+k) \oplus y(i+k)) = \left(\bigoplus_{\substack{k=0 \\ a(k)=1}}^{n-1} x(i+k) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{k=0 \\ a(k)=1}}^{n-1} y(i+k) \right).$$

Tämä on käyttökelpoinen tulos: jos $x^\alpha \neq x$ on jonon x mielivaltaisesti syklisesti siirretty versio — ja siis saman siirtorekisterin geometrian laillinen m -jono — $x^\beta \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus x^\alpha$ on itse saman geometrian m -jono, joka on syklisesti siirretty jonon x versio. Kaikki tämän geometrian m -jonot ovat syklisesti siirrettyjä versioita toisistaan.

$2^n - 1$ -pituisen m -jonon tunnettu ominaisuus on, että se sisältää 2^{n-1} ykköstä ja $2^{n-1} - 1$ nollaa. Näin käy siksi, että jokainen bitti on siirtorekisterin sisällön oikeanpuoleinen bitti. Siirtorekisteri kiertää kaikkien n -bittisten lukujen läpi, paitsi nollan. Jos nolla olisi mukana, ykkösten ja nollien määrä olisi sama.

Tämän ominaisuuden ansiosta $x^\beta = x \oplus x^\alpha$ sisältää yhden bittiarvon 1 enemmän kuin bittiarvojen 0 lukumäärä. Syklinen autokorrelaatio saadaan yhtälöstä **7.2**:

$$\begin{aligned} \text{Corr}\{\bar{x}, \bar{x}^\alpha\} &= \frac{1}{2^n - 1} (C_0(x \oplus x^\alpha) - C_1(x \oplus x^\alpha)) = \\ &= \frac{1}{2^n - 1} (C_0(x^\beta) - C_1(x^\beta)) = -\frac{1}{2^n - 1}, \end{aligned}$$

kaikille syklisille siirroille α paitsi nollalle. Nollalle tietenkin pätee identtisesti $x \oplus x = 0$, siis

$$\text{Corr}\{\bar{x}, \bar{x}\} = \frac{1}{2^n - 1} C_0(x \oplus x) = \frac{2^n - 1}{2^n - 1} = 1.$$



Katso kuva taulukossa 7.3.

Robert Gold näytti vuonna 1967, että jos käyttää kahta eri siirtorekisteriä x ja y , joiden geometriat ovat *erilaisia*, kaikki yhdistelmät eli *Goldin koodit*

$$g_0 \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y, \quad g_1 \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y^\alpha, \quad g_2 \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y^{\alpha'}, \quad g_3 \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y^{\alpha''}, \quad \dots$$

eri *suhteellisilla* syklisillä siirroilla $0, \alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ x :n ja y :n välillä ovat käyttökelpoisia erottamaan signaalit toisistaan, kun niiden absoluuttiset aikasiirtymät ovat tuntemattomia.

On selvää, että eri jonot ristikorreloivat minimaalisesti, esimerkiksi

$$\begin{aligned} g_i \oplus g_j &= (x \oplus y^\alpha) \oplus (x \oplus y^{\alpha'}) = \\ &= (y^\alpha \oplus y^{\alpha'}) \oplus (x \oplus x) = (y^\alpha \oplus y^{\alpha'}) \oplus 0 = y^\beta, \end{aligned}$$

joka on syklisesti siirretty jonon y versio, jossa on 2^{n-1} ykköstä ja $2^{n-1} - 1$ nollaa, eli jono on hyvin tasapainoinen. Seuraa

$$\begin{aligned} \text{Corr}\{\bar{g}_i, \bar{g}_j\} &= \frac{1}{2^n - 1} (C_0(g_i \oplus g_j) - C_1(g_i \oplus g_j)) = \\ &= \frac{1}{2^n - 1} (C_0(y^\beta) - C_1(y^\beta)) = -\frac{1}{2^n - 1} \end{aligned}$$

kaikille pareille g_i, g_j . Tämä on hyvä uutinen, jos jonoja käytetään eri satelliittien signaalien erottamiseksi toisistaan.

Myös autokorrelaatiota pitää tutkia. Huomaa, että g_1 *ei* ole syklisesti siirretty g_0 . Jono g_0 syklisesti siirrettynä määrällä α on¹

$$g_0^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (x \oplus y)^\alpha = x^\alpha \oplus y^\alpha.$$

Jonon g_0 syklinen autokorrelaatiofunktio on²

$$\begin{aligned} g_0^\alpha \oplus g_0^{\alpha'} &= (x^\alpha \oplus y^\alpha) \oplus (x^{\alpha'} \oplus y^{\alpha'}) = \\ &= (x^\alpha \oplus x^{\alpha'}) \oplus (y^\alpha \oplus y^{\alpha'}) = x^\beta \oplus y^\gamma \\ \implies \text{Corr}\{\bar{g}_0^\alpha, \bar{g}_0^{\alpha'}\} &= \frac{1}{2^n - 1} (C_0(g_0^\alpha \oplus g_0^{\alpha'}) - C_1(g_0^\alpha \oplus g_0^{\alpha'})) = \\ &= \frac{1}{2^n - 1} (C_0(x^\beta \oplus y^\gamma) - C_1(x^\beta \oplus y^\gamma)). \end{aligned}$$

¹Tämä merkitsee fysikaalisesti, että molemmat rekisterit x ja y liipaistaan samanaikaisesti α kertaa, ja lähdöt yhdistetään XOR-portin kautta. Katso kuva B.1.

²Ei saa olettaa $\beta = \gamma$!



Tämä tekee selväksi, että x ja y on valittava siten, että kaikki jonot $x^\beta \oplus y^\gamma$ ovat *tasapainoisia* eli sisältävät suunnilleen yhtä monta nollaa kuin ykköistä. Käytännössä tähän käyvät kaikki jonot, jotka saadaan, kun x ja y siirretään syklisesti suhteessa toisiinsa kaikilla $N = 2^n - 1$ mahdollisella tavalla. Päte

$$(x^\beta \oplus y^\gamma)^{N-\beta} = x^{\beta+(N-\beta)} \oplus y^{\gamma+(N-\beta)} = x^N \oplus y^\delta = x \oplus y^\delta,$$

siis

$$C_0(x^\beta \oplus y^\gamma) = C_0(x \oplus y^\delta), \quad C_1(x^\beta \oplus y^\gamma) = C_1(x \oplus y^\delta),$$

ja näiden tulee olla lähellä toisiaan kaikille $\delta = 0, 1, \dots, N - 1$.

Tässä tapauksessa $g_0:n$ — ja kaikkien $g_i:n$ — autokorrelaatiofunktioilla on yksiselitteinen huippu origolla: $\text{Corr}\{\bar{g}_0, \bar{g}_0\} = \text{Corr}\{\bar{g}_0^\alpha, \bar{g}_0^\alpha\} = 1$, ja pienehköjä arvoja $\text{Corr}\{\bar{g}_0^\alpha, \bar{g}_0^{\alpha'}\}$ muualla. Tämä on onnistuneen ajassa korreloinnin edellytys satelliitin signaalin ja vastaanottimen jäljennöksen välillä.

Kaikki huipun ulkopuoliset arvot eivät tule koskaan olemaan aivan niin pieniä kuin m -jonojen arvo $-1/(2^n - 1)$.

Sitäkään ei ole vaikea todistaa, että jonot $g_0 = x \oplus y$ ja $g_1 = x \oplus y^\alpha$ ovat *olennaisesti* erilaisia — eli niitä ei voida muuntaa toisilleen syklisellä siirrolla. Ristiriitatodistus on: mikäli olisi totta, että g_1 voitaisiin tuottaa syklisesti siirtämällä g_0 , silloin olisi

$$g_0^\beta = g_1,$$

jossa β merkitsee tämän hypoteettista siirtoa, joka ei ole nollasiirto. Kirjoittaminen auki antaa

$$(x \oplus y)^\beta = x \oplus y^\alpha \implies x^\beta \oplus y^\beta = x \oplus y^\alpha.$$

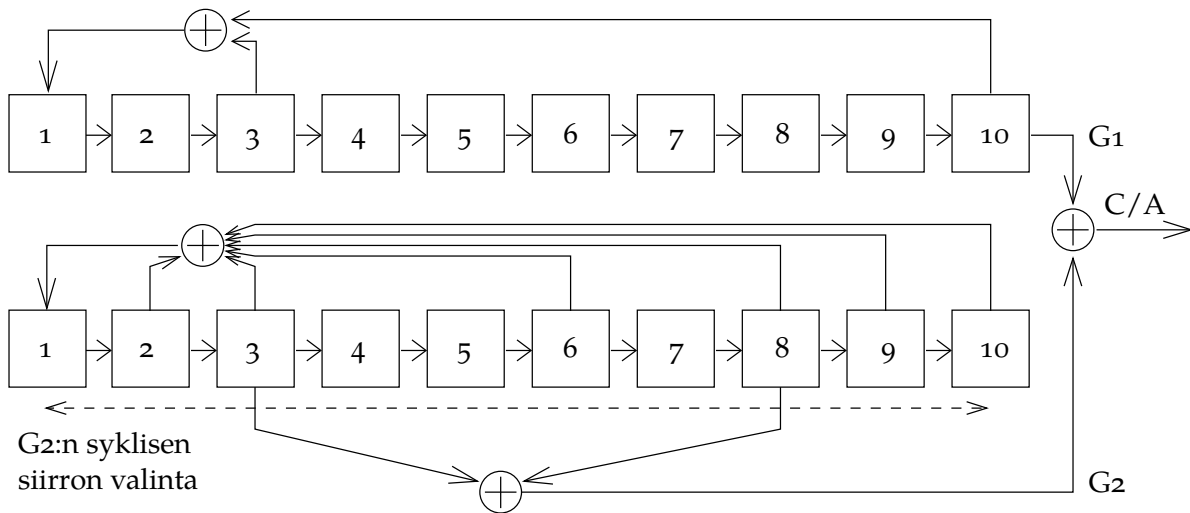
Operaatio $\oplus y^\alpha$ oikealta antaa

$$x^\beta \oplus y^\beta \oplus y^\alpha = x \oplus \overbrace{y^\alpha \oplus y^\alpha}^0 \implies x^\beta \oplus y^\beta \oplus y^\alpha = x,$$

ja operaatio $x^\beta \oplus$ vasemmalta taas antaa

$$\overbrace{x^\beta \oplus x^\beta}^0 \oplus \overbrace{y^\beta \oplus y^\alpha}^Y = \overbrace{x^\beta \oplus x}^{x^\gamma} \implies \begin{cases} \beta = \alpha: & Y = 0 = x^\gamma, \\ \beta \neq \alpha: & Y = y^\delta = x^\gamma, \end{cases}$$





KUVA B.1. C/A-koodin muodostaminen käyttämällä kahta kymmenen solun lineaarisen palauteen siirtorekisteriä G_1 ja G_2 , joiden palautehanojen geometriat ovat erilaisia. Rekisterin G_2 syklinen siirto, joka on erilainen jokaiselle satelliitille, asetetaan ennen laukaisua valitsemalla ja sekoittamalla kaksi solulähtöä: $y^\alpha \oplus y^{\alpha'} \rightarrow y^\beta$.

joka kertoo, että syklisesti siirretty x on yhtä kuin nolla tai syklisesti siirretty y , mikä merkitsisi sitä, että x ja y tulevat samasta siirtorekisterin geometriasta. Tässä on ristiriita.

Yllä oleva todistus pätee parille g_0 ja g_1 . Syklisyyden vuoksi todistus pätee kaikille g_i :lle g_0 :n sijaan: "siemenen" y poimiminen sen $N = 2^n - 1$ eri syklisesti siirretyn version joukosta. Näin ollen on mielivaltaista, mikä g_i valetaan g_0 :n rooliin. Jos kutsutaan $\tilde{y} \stackrel{\text{def}}{=} y^\alpha, \tilde{x} \stackrel{\text{def}}{=} x^\alpha$:

$$\tilde{g}_0 \stackrel{\text{def}}{=} g_0^\alpha = (x \oplus y)^\alpha = x^\alpha \oplus y^\alpha = \tilde{x} \oplus \tilde{y}$$

ja

$$y^{\alpha'} = (y^\alpha)^{\alpha' + (N - \alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{y}^\beta, \quad y^{\alpha''} = (y^\alpha)^{\alpha'' + (N - \alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{y}^{\beta'}, \quad \dots$$

ja muut g :t ovat

$$\tilde{g}_1 = \tilde{x} \oplus \tilde{y}^\beta, \quad \tilde{g}_2 = \tilde{x} \oplus \tilde{y}^{\beta'}, \quad \tilde{g}_3 = \tilde{x} \oplus \tilde{y}^{\beta''}, \quad \dots \quad (\text{B.3})$$

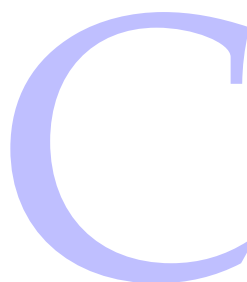
Voidaan myös vapaasti valita, mitä joukon B.3 jäsenistä kutsutaan nimellä g_1 .

Kuva B.1 näyttää laitteistotason toteutuksen.





Woodburyn matriisiyhtälö



Lähdetään näistä kahdesta matriisiyhtälöstä:

$$AX + UY = I, \quad (\text{C.1})$$

$$VX - C^{-1}Y = 0. \quad (\text{C.2})$$

Lisätään yhtälö C.2 kerrottuna vasemmalta UC:n kanssa yhtälöön C.1:

$$(A + UCV)X = I \implies X = (A + UCV)^{-1}. \quad (\text{C.3})$$

Vähennetään yhtälö C.1 kerrottuna vasemmalta VA^{-1} :n kanssa yhtälöstä C.2:

$$(-C^{-1} - VA^{-1}U)Y = -VA^{-1} \implies Y = (C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

Sijoitetaan takaisin yhtälöön C.1:

$$\begin{aligned} AX + U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} &= I \\ \implies X &= A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Näin saatiin matriisille X kaksi eri ilmaisua C.3 ja C.4, joiden on oltava *identtisiä*. Saadaan

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}, \quad (\text{C.5})$$

Woodburyn¹ matriisiyhtälö (Keijo Inkilä, henkilökohtainen tiedotus);
Wikipedia, Woodbury matrix identity.

¹Max Atkin Woodbury (1917–2010) oli amerikkalainen matemaatikko.



Tosiaikaiset järjestelmät ja verkot

D

Yksi teknologisen navigoinnin yleinen edellytys on mahdollisuus vastaanottaa ulkoista tietoa tosiajassa tietoliikenneverkon kautta. Lisäksi vaaditaan tosiaikaiseen käyttöön soveltuva ja suorituskyvyltään riittävä laitteisto ohjelmistoinen. Näitä vaatimuksia tutkitaan seuraavasti.

Tosiaikaisuuden määritelmä on

Taattu vasteaika (latenssi).

Prosessi, jonka vasteaika on kuukausi, voi olla tosiaikainen, jos kuukausi on *taattu*. Toinen prosessi, jonka vasteaika on millisekunti, ei ole tosiaikainen, jos vasteaika on yleensä alle millisekunnin, muttei aina: joskus se voi olla kaksikin millisekuntia, kymmenen tai jopa enemmän.



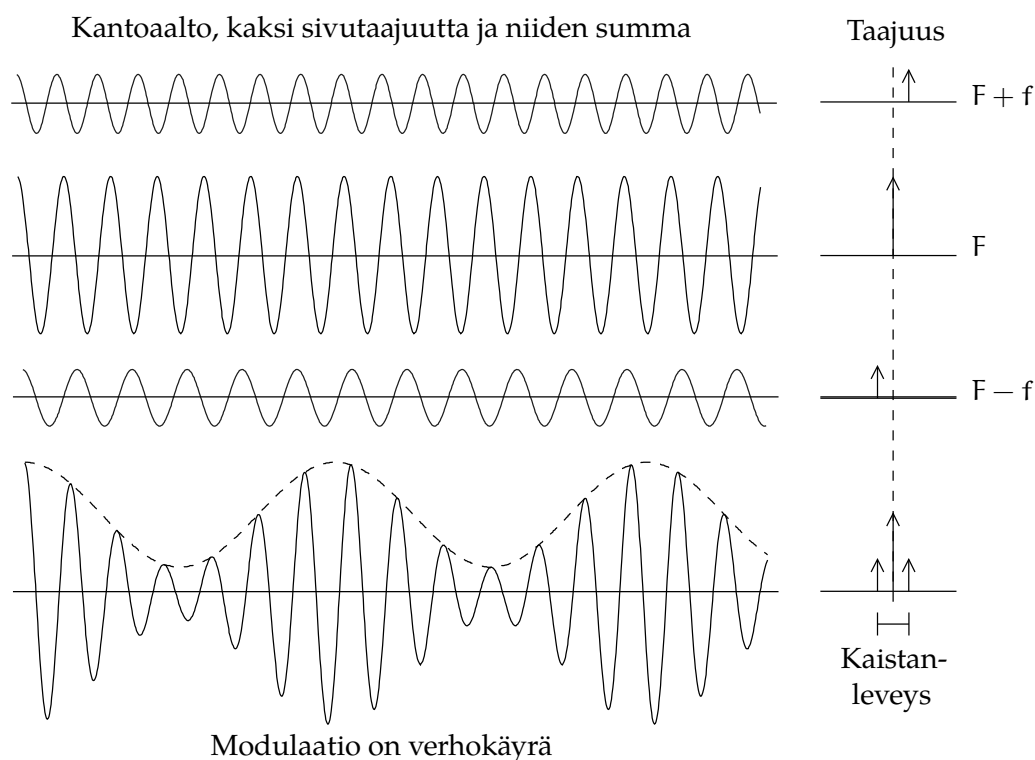
D.1 Tietoliikenneverkot



D.1.1 Lähetysverkot

Lähetysverkot eli yhdestä moneen -tyyppiset viestintäverkot ovat lähes yhtä vanhoja kuin radioaaltojen löytäminen. Radioaaltoja — kantaaltoja — voidaan käyttää digitaalisten tai analogisten signaalien välittämiseen. Esimerkki ensimmäisestä on Morse-koodin käyttö radio-sähkötyksessä. Analogisten signaalien esimerkkejä ovat radioääni ja radiopuhelinviestintä sekä televisiokuva. Mittaus- eli telemetriatiedot ovat lähes aina digitaalisia.

Tiedot *moduloidaan* ja kuljetetaan radioaalloilla. Modulaatiotekniikoita ovat muun muassa amplitudimodulaatio, taajuusmodulaatio ja vaihemodulaatio.



KUVA D.1. Amplitudimodulaatio ja kaistaleveys.



D.1.1.1 Esimerkki: amplitudimodulaatio

Kuvassa **D.1** nähdään, miten amplitudimodulaatio laittaa signaalin eli katkokäyrän, esimerkiksi ääniaallon, kantaaallon päälle¹. Oikealla nähdään, millainen on moduloidun aallon spektri.

Jos kantaaallon taajuutta kutsutaan nimellä F ja moduloivan signaalin (äänen) taajuutta nimellä f , voidaan kirjoittaa moduloitu signaali muodossa

$$\begin{aligned} A(t) &= \cos(2\pi Ft) \cdot \left(\frac{3}{2} + \cos(2\pi ft) \right) = \\ &= \frac{3}{2} \cos(2\pi Ft) + \frac{1}{2} \left(\cos(2\pi(F+f)t) + \cos(2\pi(F-f)t) \right). \end{aligned}$$

Tästä näkyy, että modulaation vaikutus voidaan esittää kahden taajuuden, $F + f$ ja $F - f$, puolisummana.

Jos moduloiva aalto sisältää suuren määrän eri taajuuksia, $0 < f < f_{\max}$, sisältää tuloksena oleva spektri signaalia eli tehoa kaikkialla

¹Esimerkissä oletetaan, että kantaaalto on vahvempi kuin modulaatiot, kuten on asian laita perinteisessä amplitudimodulaatiossa. Tämä kantaaalto sisältää kuitenkin paljon tehoa, ja siksi kantaaalto poistetaan joskus signaalista. Myös sivukaistoista yksi voidaan poistaa, jolloin ratkaisua kutsutaan sivunauhamodulaatioksi (**SSB**), joka säästää puolet kaistanleveydestä.

kaistassa $(F - f_{\max}, F + f_{\max})$. Sanotaan, että *kaistaleveyden kulutus* on $2f_{\max}$.

Lähetysverkoille kaistaleveys on rajallinen ja arvokas resurssi, joka tulee kohdentaa harkiten.



D.1.1.2 Nyquistin lause

Tavallinen ongelma on ajan funktion edustaminen erillisillä otospisteillä eli vastaavasti stokastisen prosessin edustaminen aikasarjalla. Voidaan osoittaa, että otospisteiden aikaväli Δt ei saa olla pidempi kuin *puolet lyhimmästä funktiossa esiintyvistä jaksosta*. Tätä kutsutaan Nyquistin² lauseeksi. Jos funktio täyttää Nyquistin ehdon, funktion voi muuntaa edestakaisin ajan funktion muodosta $A(t)$ taajuuden funktion muotoon $A(f)$ käyttämällä diskreettiä Fourier'n muunnosta. Numeerisesti tämän laskemiseen käytetään nopeaa Fourier'n muunnosta (FFT).

Jos meillä on moduloiva signaali eli ajan funktio, jonka korkein taajuus on f_{\max} , sen lyhin jakso on $1/f_{\max}$. Amplitudimodulaatiolla sekunnissa välitetty otosten lukumäärä on $2f_{\max}$ eli juuri moduloidun signaalin varaama tehollinen kaistaleveys.



D.1.2 Piirikytkentäiset verkot



D.1.2.1 Historia

Ensimmäinen kytkentäinen eli monesta moneen -tyyppinen verkko oli puhelinverkko. Se on yhä olemassa, olihan se historiallinen jymymenestys. Puhelinverkko on itse asiassa piirikytkentäinen verkko, eli se luo väliaikaisen mutta kestävä yhteyden puhujien välille.

Puhelimen keksimisestä kiitetään tavallisesti Alexander Graham Belliä. Todellisuudessa aika oli keksintöön kypsä, aivan kuten höyrykoneen, kaukoputken ja monen muun käytännöllisen keksinnön tapauksessa. Monet, kuten Elisha Gray, joka jätti patenttihakemuksensa vain pari tuntia Bellin jälkeen, Antonio Meucci (Carroll, 2002) ja Thomas Edison, tarjosivat hyödyllisiä ideoita jo ennen kuin toimiva toteutus mahdollisti ensimmäisen puhelinverkon rakentamisen.

Monta vuotta American Telephone & Telegraph oli puhelinteknologian monopolin haltija. Ajoittain syntyi kilpailulainsäädännön oikeusjuttuja yritystä vastaan, joka oli vastuussa myös ensimmäisen puhelin-kaapelin laskemisesta Atlantin yli. Yhtiö rakensi myös ensimmäisen

²Harry Nyquist (1889–1976) oli ruotsalaissyntyinen amerikkalainen sähköinsinööri.

aktiivisen eli vahvistin pohjaisen tietoliikennesatelliitin *Telstarin* ja keksi UNIX^{®3}-käyttöjärjestelmän . . .

Puhelin perustuu äänen lähettämiseen sähköisessä muodossa kuparilankaa pitkin. Näin tapahtuu lankapuhelimen yhteydessä edelleen muutaman metrin matkalla tilaajan lähellä. Kaikki muu verkon laitteisto on nykyisin täysin digitaalista. Yhteyden muodostaminen oli aluksi manuaalinen tehtävä. Jo ennen vuotta 1900 rakennettiin ensimmäisiä mekaanisesti automatisoituja puhelinkeskuksia. Numero valittiin pyörivän rei'itetyn kiekon avulla, joka lähetti yhtä monta pulssia kuin valitun sormenreiän alla kirjoitettu numeromerkki. Tätä kutsutaan "pulssivalinnaksi". Vuoden 1963 jälkeen nopeampi äänivalinta korvasi sen suurelta osin, vaikkakaan ei täysin.

Puhelinnumeroiden järjestelmä on kolmen kerroksen hierarkkinen järjestelmä, jota ei hallita yhdestä pisteestä. Kyseessä on siis merkittävä keksintö, joka on kestänyt hyvin aikaa, vaikka se on ainutlaatuisen käyttäjäepäystävällinen. Perinteisesti numerot haettiin käsin paksuista paperikirjoista, puhelinluetteloista. Maailma on jaettu kansallisiin alueisiin, joilla on omat maakoodit. Yhdysvalloilla on maakoodi 1 ja useimmilla suurilla mailla kaksinumeroinen koodi, esimerkiksi Saksalla 49. Suomen kaltaiset pienet ja köyhät maat ovat hyväksyneet kolminumeroiset koodit (358). Kansallisten alueiden alla ovat suuntanumerot, tyypillisesti kaupungeille, joskaan ei aina, ja niiden sisällä tilaajien omat numerot.

Puhelinnumeroita on yritetty tehdä helpommin muistettaviksi, mutta kaikki yritykset ovat epäonnistuneet. Uudet puhelimen kaltaiset ideat, kuten Internetin puhelinpalvelut, saattavat pitemmällä tähtäimellä muuttaa tilanteen. On merkille pantavaa, että sovellukset, kuten Signal^{®4} ja WhatsApp^{®5}, käyttävät käyttäjätunnuksena sen matkapuhelimen numeroa, johon ne on asennettu! Vanhoja tapoja on vaikea muuttaa.

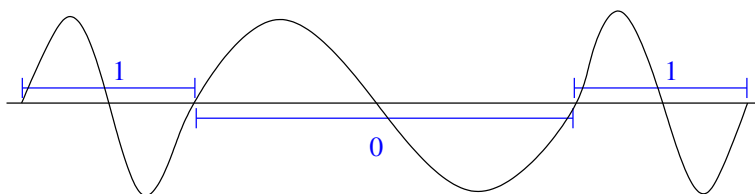
Puhelinverkon digitalisointi on mahdollistanut "*always-on*" eli aina päällä olevat tietoyhteydet jopa viimeisten jäljellä olevien kuparilankametrieni yli taajuuksilla, jotka ovat kuultavan äänen taajuuksien yläpuolella. Alipäästösuotimen avulla ääntä ja tietoja voidaan käyttää jopa samanaikaisesti ja samalla linjalla: digitaalinen tilaajayhteys, *digital*

³UNIX on The Open Groupin rekisteröity tavaramerkki.

⁴Signal on Signal Messenger LLC:n rekisteröity tavaramerkki.

⁵WhatsApp on WhatsApp Inc:n rekisteröity tavaramerkki.





Kuva D.2. Binaarinen taajuusavainnusmodulaatio eli "binary frequency-shift keying" (BFSK).

subscriber line, DSL.



D.1.2.2 Modeemit

Koska puhelinverkko on suunniteltu äänen siirtämistä varten, tietojen siirto onnistuu vain, jos tiedot voidaan muuntaa ääniksi, eli analogisiksi ääniaalloiksi, ja ääni takaisin tiedoksi. Se tehdään laitteella nimeltä *modeemi*, modulaattori-demodulaattori.

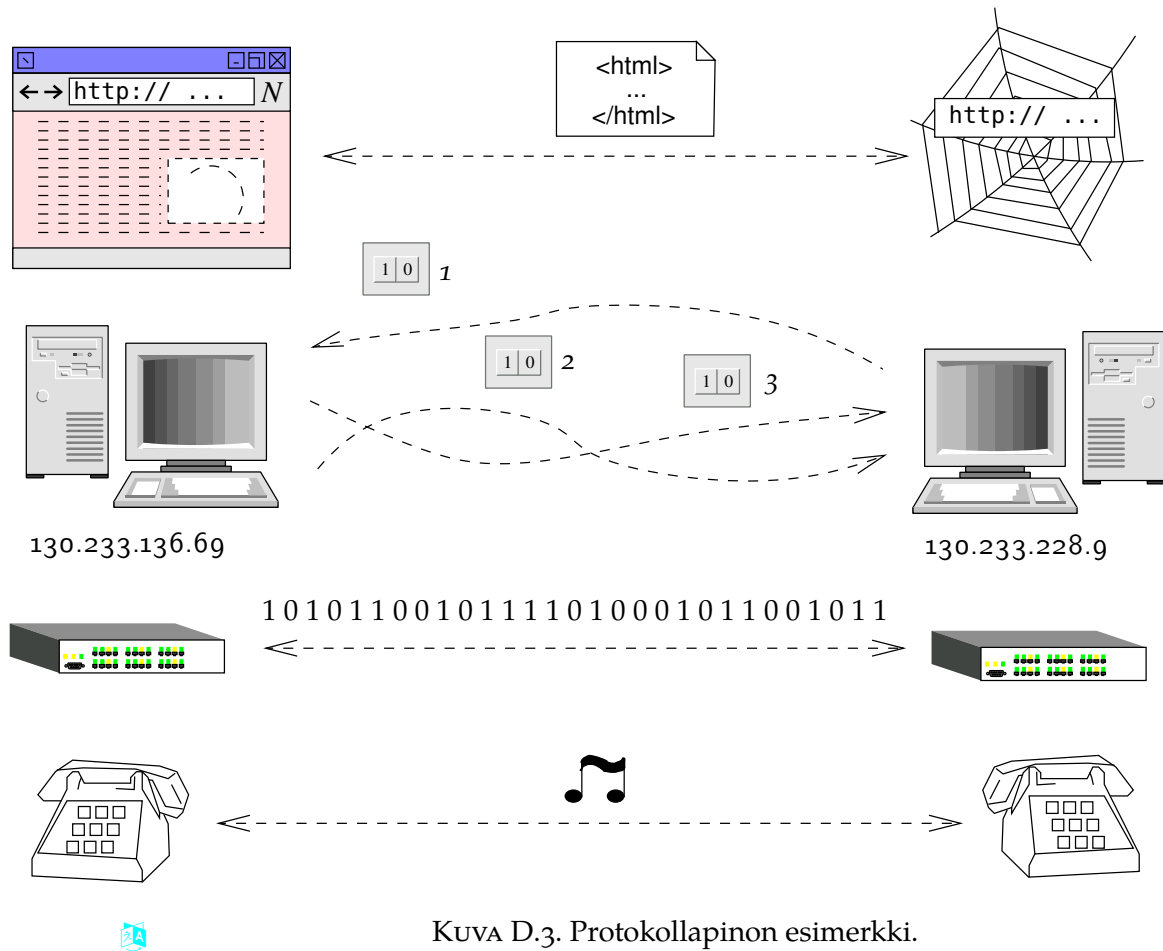
Kuva D.2 näyttää yhden tekniikan, binaarisen taajuusavainnuksen, BFSK, jolla modulaatio usein toteutetaan. Looginen 1 koodataan lyhyeksi eli korkean taajuuden aalloksi ja looginen 0 pitkäksi eli matalan taajuuden aalloksi. Tämä on yksinkertainen ja hieman tuhlaileva, mutta tehokas ja vankka modulaatiotekniikka⁶. Lisäksi lähetetään tarkistussummia, mikä varmistaa, että vastaanotettu tieto on sama kuin se, mikä lähetettiin myös kohisevia linjoja pitkin. Käytetyt menetelmät ovat pariteettitarkistus ja syklinen redundanssitarkistus⁷ CRC). Tietojen pakkausta käytetään aina kun mahdollista, koska se nopeuttaa erityisesti tekstityyppisen tiedon siirtoa.

Modeemeille löytyy useita standardeja, joista suurin osa on Kansainvälisen televiestintäliiton (ITU) käsialaa. Laadukkaalla analogisella linjalla 56k bittia sekunnissa on parasta, mihin voidaan päästä perinteisen soittomodeemin äänitaajuuksilla.

Modeemin käyttö tietojen siirtämiseksi pitkin verkkoa, joka oli suunniteltu vain äänen siirtämistä varten, on *protokollapinon* esimerkki. Alin kerros on äänensiirto, johon kerrotaan digitaalinen tiedonsiirto bittivirran muodossa. Lisää kerroksia voidaan asettaa tämän päälle. Käytössä on esimerkiksi Internet Protocol (IP) ja Transmission Control Protocol

⁶Samaa tekniikkaa käytettiin myös Commodore 64:n kaltaisten kotimikrojen kasettinauhuri pohjaisissa tallennusratkaisuissa.

⁷Sekä pariteetti- että CRC-tarkistus muistuttavat desimaalilukujen käsilaskennasta tuttua yhdeksänmenetelmää.



Kuva D.3. Protokollapinon esimerkki.

(TCP), joista lisää myöhemmin, ja edistyneet protokollat, kuten web-bipalvelu HTTP. Kun muodostetaan sellainen yhteys, pinon jokainen kerros tulee muodostaa vuorollaan, alimmasta ylöspäin.

Protokollapinossa korkeammat kerrokset ovat tavallisesti ohjelmistopohjaisia ja alimmat kerrokset on toteutettu laitteistossa. Esimerkiksi puhelinääni siirtyy perinteisesti jännitteen vaihteluina kuparilangassa. Digitaalisen teknologian kehittyessä ohjelmisto kuitenkin leviää pinossa alaspäin: viimeistä muutamaa metriä lukuun ottamatta puhelinääni siirtyy nykyisin digitaalisina bittikuvioina ja usein valokuitukaapeleita pitkin.

Tämän ohjelmiston alaspäin leviämisen myötä laitteet, jotka aiemmin olivat hyvin erilaisia, muuttuvat laitteistotasolla hyvin samanlaisiksi. Esimerkiksi puhelin ja televisio — ja GNSS-vastaanotin — muistuttavat yhä enemmän yleistietokoneita, jotka on vain ohjelmoitu eri tavalla ja jotka käyttävät eri oheislaitteita. Tätä ilmiötä kutsutaan *teknologiseksi lähentymiseksi* eli konvergenssiksi.



D.1.2.3 Mobiililaitteet

Matkapuhelimia, jotka perustuvat **GSM**-järjestelmään (Global System for Mobile Communications) voidaan käyttää myös datansiirtoon. Alkuperäisellä **GSM**-protokollalla saavutettavat siirtonopeudet olivat 9600–14 400 bittiä sekunnissa.

Käytössä on nykyisin myös edistyneempiä protokollia, kuten **GPRS** (General Packet Radio Services) ja **EDGE** (Enhanced Data Rates for GSM Evolution), jotka mahdollistavat aina päällä olevat digitaaliset yhteydet, joissa tiedonsiirtonopeus on paljon suurempi. Usein näistä teknologioista puhutaan vertauskuvallisesti sukupolvina: 2G, 3G ja 4G.

Tästä siirrytään luontevasti seuraavaan aiheeseen: pakettikytkentäisiin verkkoihin.



D.1.3 Pakettikytkentäiset verkot

Klassinen pakettikytkentäinen verkko on Internet. Se on myös monesta moneen -tyyppinen tietoliikenneverkko, mutta siihen yhtäläisyys puhelinverkon kanssa loppuu. Internet perustuu *pakettien* siirtoon. Paketit koostuvat tietotavusta ja oheisinformaatiosta. Ei ole mahdollista sanoa, miten tietty paketti kulkee määränpäähänsä, vai saapuuko se lainkaan ja jos saapuu, kuinka nopeasti.

Pakettikytkentäisten verkkojen idea vaihtoehtona piirikytkentäisille verkoille sai alkunsa sotilaallisesta tutkimuksesta: onhan pakettikytkentäinen verkkosiirto vähemmän altis verkon paikallisille vaurioille, eli tiedonsiirtoa on vaikeampi keskeyttää. Sama pätee yrityksiin estää verkko: ”Internet tulkitsee sensuurin vahingoksi ja reitittää sen ohitse.”

Internetin toiminta, **IP**-osoitteet ja nimipalvelut (**DNS**) selitetään monessa paikassa⁸, emmekä toista niitä tässä. Internetin protokollan (**IP**) päälle on rakennettu useita protokollia, joista tärkeimmät ovat

- **ICMP** (Internet Control Message Protocol), esimerkiksi tunnettu komento ping⁹ verkkoyhteyksien tarkistamiseksi.
- **UDP** (User Datagram Protocol) on yhteydetön protokolla: lähettäjä lähettää paketteja ja vastaanottaja ottaa ne vastaan — useimmiten. Protokollaan ei kuulu onnistuneen vastaanoton varmistusta eikä

⁸Esimerkiksi [Wikipedia, Domain Name System](#).

⁹Nimi on onomatopoeettinen ja matkii kaikuluotaimen ääntä, **Muuss** (ilman päivämäärää).

myöskään varmistusta siitä, että paketit vastaanotetaan oikeassa järjestyksessä ja vain kerran. UDP:n hallintokustannukset ovat alhaisia, mikä on tavallisin syy siihen, miksi sitä käytetään. Esimerkiksi Internetin ajanpitoprotokolla **NTP** (*Network Time Protocol*) käyttää **UDP**:ta. Aikapalvelin vain lähettää paketteja asiakkaille, jotka voivat vastaanottaa ne ja joiden avulla asiakas voi synkronoida kellonsa.

- **TCP** (Transmission Control Protocol) on *yhteyspohjainen* protokolla. Se muodostaa yhteyden kahden isäntäkoneen välille Internetissä ja siirtää paketteja molempiin suuntiin, kunnes yhteys suljetaan. Kyseessä on siis *kaksisuuntainen* protokolla, mutta se aloitetaan aina yhdeltä puolelta, tavallisesti asiakaspuolelta.

Paketit voivat matkustaa isäntäkoneesta toiseen monen eri polun kautta. Vastaanottaja laittaa ne oikeaan järjestykseen jokaisen paketin *järjestysnumeron* perusteella. Jos paketti puuttuu ja sen aikakatkaistu on umpeutunut, lähetetään uudelleenlähetysoylyntö. Näin ollen **TCP** on *luotettava*.

Yhteyden turvallisuus varmistetaan siten, että molemmat isäntäkoneet valitsevat yhteyden pakettilaskurin alkuarvon satunnaisesti. Se tekee yhteyden kaappaamisen — niin sanottu ”mies välissä -hyökkäys” — vaikeaksi, joskin mahdolliseksi.

Jokaisessa paketissa on kaksi datakenttää: *lähdeportti* ja *kohdeportti*. Nämä ovat 16-bittisiä lukuja välillä 0 ja 65 535, joilla erotetaan eri palvelutyypit toisistaan. Esimerkiksi **HTTP** käyttää tavallisesti porttia 80¹⁰. Nämä ”portit” ovat kuitenkin puhtaasti ohjelmallisia: verkkoyhteyksiä hoitava ohjelmistokerros käyttöjärjestelmässä erottaa porttinumerot toisistaan ja ohjaa paketit sopiville palvelin- tai asiakasprosesseille. Tätä ei voi verrata *laitteiston* sarja-, rinnakkais- tai **USB**-porttiin!

Yksikään niistä Internet-protokollista ei ole oikeasti tosiaikainen — koska Internet ei ole. Usein niitä käytetään tosiaikaisella tavalla, olettaen että lähetyksen vasteaika ei koskaan kasva ylen suureksi, mutta se on *uhkapeliä*. Aika viaton esimerkki on musiikin suoratoisto. Mutta jo kohtalainen ruuhka paikallisesti tai kauempana tekee siirtoajoista ennalta arvaamattomia.

¹⁰Kaikkien palveluiden lista on tiedostossa `/etc/services`.





D.2 Tosiaikaiset järjestelmät



D.2.1 Laitteisto

Navigoinnissa käytössä olevissa tosiaikaisissa järjestelmissä digitaalisen laitteiston laskentateho on tavallisesti vaatimaton. Esimerkiksi matkapuhelimen alhaisen käyttötehon ja pienen koon vaatimukset rajoittavat, minkä tyyppistä ja paljonko ”rautaa” voidaan käyttää.

Toinen rajoite saattaa olla, ettei laitteiston kanssa voida käyttää täysikokoista näppäimistöä ja että on tyydyttävä hiiren sijasta pieneen kosketusnäyttöön. Myös antennin koko saattaa olla rajallinen. Navigoinnin käyttöympäristöstä riippuen vaatimuksena voi olla myös fyysinen kestävyys.



D.2.2 Käyttöjärjestelmät

Mainitut laitteistorajoitukset rajoittavat myös sitä, minkälaista järjestelmäohjelmistoa voidaan käyttää. Tavallisesti käytetään esimerkiksi UAV:ssä ”sulautettuja” käyttöjärjestelmiä, kuten Android™¹¹, Windows®¹² ja Linux®¹³ sulautettuina versioina.

Korkean luotettavuuden operaatioissa, esimerkiksi avaruusaluksilla, käytetään myös tosiaikaisia sulautettuja järjestelmiä, kuten QNX®¹⁴ ja Wind River Systems. Mars-mönkijät Spirit, Opportunity ja Curiosity sekä Mars-laskeutuja InSight käyttivät ja käyttävät Wind River Systemsin VxWorks®¹⁵-ohjelmistoa.

”Kovissa” tosiaikaisissa sovelluksissa eli sovelluksissa, joissa tosiaikaisuuden vaatimus on ehdoton, käyttöjärjestelmä saisi mieluiten olla kaatumatta. Spiritin järjestelmä kuitenkin kaatui kerran, kun sen muisti täyttyi *flash*-tallennustilan tiedostokahvoilla. Siivouksen jälkeen se nousi taas kauniisti pystyyn (Weiss, 2004).

Lienee selvää, että jos haluaa liittää järjestelmään eri laitteita, kuten GPS ja muut anturit, laiteajureiden saatavuus tai niiden kehittämisen helppous ovat kriittisiä asioita.

¹¹Android on Google Inc:n tavaramerkki.

¹²Windows on Microsoft Corporationin rekisteröity tavaramerkki.

¹³Linux on The Linux Foundationin rekisteröity tavaramerkki.

¹⁴QNX on QNX Software Systems Ltd:n rekisteröity tavaramerkki.

¹⁵VxWorks on Wind River Systems Inc:n rekisteröity tavaramerkki.

Kun laitteistoteho kasvaa ja koko ja sähkökulutus laskee teknologian kehityksen myötä, kuluttajatason yleiskäyttöjärjestelmät löytävät hieman viritettyinä yhä useammin tiensä myös näihin rajoitettuihin mobiililustoihin.

Peruskäyttöjärjestelmä toimii seuraavalla tavalla: kun se käynnistään itse käyttöjärjestelmän, tiedostojärjestelmän ja eri laiteajureiden aktivoimisen jälkeen, alkuprosessi käynnistää kaikki tähän järjestelmään tarvittavat taustapalveluprosessit eli daemonit lapsiprosesseina ja siirtyy monen käyttäjän tilaan. Käyttöjärjestelmä lataa *login*-prosessin, joka keskustelee käyttäjän kanssa yhdellä tai useammalla päätelaitteella. Kun käyttäjä kirjautuu, hänelle annetaan käytettäväksi *shell* eli komentotulkki, jonka avulla hän voi käynnistää omia prosessejaan.

Kuluttajatason käyttöjärjestelmä käynnistää tässä vaiheessa myös ikkunoivan GUI:n eli graafisen käyttöliittymän, jonka avulla myös kevyesti koulutetut käyttäjät voivat käyttää järjestelmää. Tämä vaatii kuitenkin lisäresursseja. Myös graafiselta käyttöliittymältä voidaan käynnistää käyttäjän prosesseja, jotka vuorovaikuttavat käyttäjän kanssa graafisen käyttöliittymän välityksellä.

Käyttöjärjestelmän määritelmän mukaan se hallinnoi järjestelmän eri resursseja tavalla, joka on käyttäjälle läpinäkyvä ja peittää tekniset yksityiskohdat. Laiteajurit ovat tästä yksi esimerkki. Ja esimerkiksi prosessoriresursseja hallinnoidaan *vuorontajan* avulla.



D.2.3 Prosessin kulku

Yksittäisen prosessin kannalta¹⁶ suorituspolku on *lineaarinen*. Tämä merkitsee, että lauseen suorituksen jälkeen prosessi jatkuu joko ohjelman seuraavalla lauseella tai sillä lauseella, johon haarautumislause (*if*, *switch*, ...) osoittaa. Näin voidaan helposti seurata hetkellistä prosessin tilaa: vain suoritettut lauseet voivat sitä muuttaa.

Proseduuri, myös aliohjelma tai funktio tai metodi, suoritetaan vain, koska jokin muu proseduuri, ja viime kädessä pääohjelma, kutsuu sitä *sen* lineaarisen suorituksen aikana. Proseduuri suoritetaan seuraavasti: kun sitä kutsutaan, se laittaa *paluuosoitteen* eli ohjelmanaskurissa olevan arvon *suorituspinolle*. Pino on **LIFO** eli *last in, first out* eli viimeiseksi sisään, ensimmäiseksi ulos -tietorakenne. Sitä käytetään proseduurikutsujen yhteydessä.

¹⁶... ja unohdetaan säikeet!

Seuraavaksi pinolle laitetaan myös proseduurikutsun mahdollisesti sisältämät parametriarvot tai osoittimet globaaleihin muuttujiin, jolloin pino kasvaa. On kaksi tapaa kutsua parametreja eli argumentteja proseduurikutsun yhteydessä: *nimivälitteisyys* ja *arvovälitteisyys*.

- *Nimivälitteisyys*: proseduurikutsun parametrina eli argumenttina käytetään muuttujan nimeä. Pinolle laitetaan osoitin kutsuvan ohjelman muuttujalle varaamaan muistipaikkaan.
- *Arvovälitteisyys*: proseduurikutsun parametrina käytetään joko ilmaisua tai vakiota. Ilmaisua evaluoidaan ohjelman suorituksen aikana, kun proseduuria kutsutaan ja saatu arvo laitetaan pinolle.

Jos halutaan, että proseduurin sisäisten laskentojen tulos palautetaan kutsuvaan proseduuriin, on käytettävä nimivälitteisyyttä. Silloin proseduurin sisällä tehdään sijoitus muuttujaan, siis sen osoittamaan muistipaikkaan, josta kutsuva proseduuri, joka itse varasi muistipaikan, löytää sen.

Myös proseduurin sisällä esitellyille paikallisille muuttujille varataan tilaa pinolle. Näiden muuttujien *näkyvyysalue* — niiden voimassaolon alue — rajoittuu suoritettavaan proseduuriin.

Kun ohjelman kulku pääsee proseduurin loppuun, poistetaan pinolta ensin nämä paikalliset muuttujat. Sen jälkeen poistetaan proseduurin omat pinolle laitetut parametrit (vakiot, ilmaisut ja osoittimet), ja lopuksi pinon päällimmäinen alkio siirretään takaisin prosessorin ohjelmalaskuriin. Näin ohjelman kulku on palannut kutsuvaan proseduuriin, joka jatkuu proseduurikutsua seuraavasta lauseesta eteenpäin.

Suorituspinon käytön edut ovat:

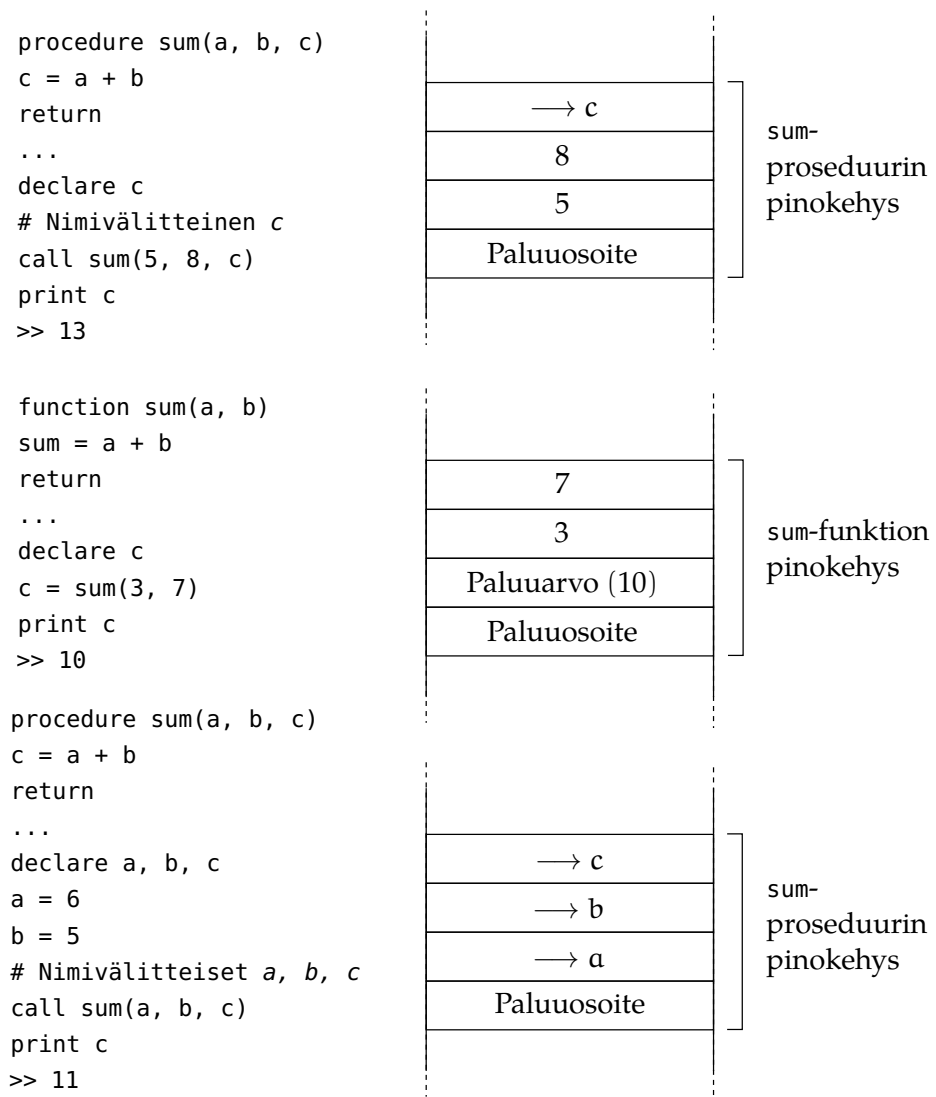
- Proseduurien sisällä esitellyt muuttujat vapautetaan, kun palataan proseduurista takaisin päin.
- Proseduureja voidaan *kutsua rekursiivisesti*: jokaisella proseduurin ilmentymällä on oma pinokehys omalla kutsuparametrien ja paikallisten muuttujien versiolla eli ilmentymällä. Tämä tietenkin edellyttää, että rekursio loppuu joskus johonkin sopivaan ehtoon. Ellei näin käy, seuraa pinon ylivuotovirhe.



D.2.4 Muistin varaus

Pinon tapauksessa muistin varaus tapahtuu lineaarisesti pino-osoittimen avulla. Muistin vapautus tapahtuu käänteisessä järjestyksessä. Pino-osoitin osoittaa aina pinon päällimmäiseen alkioon eli viimeiseen, joka





KUVA D.4. Proseduurikutsu ja pinon käyttö.

varattiin, ja ensimmäiseen, joka vapautetaan. **LIFO** — *last in, first out*.

Kasan tapauksessa muistin varaus tapahtuu myös lineaarisesti, mutta vapautus epäsynkronisesti. Kasa on sopiva muistiratkaisu kun tallennetaan muuttujia, jotka ovat vaihtelevan kokoisia, esimerkiksi merkkijonoja. Merkkijono tallennetaan pinolle osoittimena, joka osoittaa jonon sisältöön kasalla. Kun ketjutetaan esimerkiksi kaksi merkkijonoa uudeksi merkkijonoksi, laitetaan uusi jono kasalle ja vanhojen jonojen osoittimet siirretään pinolta vapautetun muistin listalle. Sama tapahtuu merkkijonolle, joka on esitelty paikallisesti proseduurin sisällä, kun ohjelman kulku palaa proseduurista.

Kun kasan muisti on käytetty loppuun, käynnistetään tiivistämisoperaatio nimeltä *roskankeruu*, joka poistaa muistin varauksen reiät,



poistetut vanhat merkkijonot eli ”raadot”, oikeasti.



D.2.5 Keskeytykset ja peittäminen

Keskeytykset ovat sekä samankaltaisia että erilaisia kuin proseduurikutsumat. Olennainen ero on, että keskeytys voi tapahtua hetkellä millä hyvänsä laitteistoon liittyvän ulkoisen tapahtuman seurauksena. Tavallisesti aiheuttaja on oheislaitte, jolla on joko tarjolla luettavissa olevia tietoja tai joka odottaa tietojen kirjoittamista. Pääsy keskeytysten käyttöön on, että ilman niitä, oheislaitteisiin tulisi lähettää riittävän usein *kiertokysely* (engl. *poll*), jotta siirrettäviä tietoja ei menetettäisi. Kiertokysely kuluttaa suorittimen aikaa.

Tietokonelaitteisto tarjoaa erityyppisiä keskeytyksiä. Kun keskeytykset laukaistaan, ne ovat vastuussa siitä, että ne eivät tee mitään, joka voisi häiritä vuoronneltuja prosesseja. Keskeytyksiä käytetään esimerkiksi syöttö- ja tulostuslaitteiden palvelemiseksi, koska ne eivät voi odottaa. Jokaiseen keskeytykseen kuuluu oma *keskeytysvektori*, ohjelmalaskuriin ladattava *keskeytyskäsitteijän* muistiosoite. Keskeytyskäsitteijä on rutiini, joka suoritetaan, kun keskeytys laukaistaan.

Esimerkkinä mainittakoon kellokeskeytysrutiini. Se laukaistaan tyyppillisesti 50 kertaa sekunnissa, ja sen nimi kertoo, mitä se tekee: as kelluttaa käyttöjärjestelmän ylläpitämää aikarekisteriä. Tavallisesti se on vastuussa myös *vuoronvaihdosta*, mikä sallii monien tehtävien ajon näennäisesti samanaikaisesti.

Jokaisessa vuoronvaihdossa sillä hetkellä käynnissä olevan prosessin *konteksti* — eli tietojoukko, johon kuuluu muun muassa suorittimen rekisterit ja ajon jatkamiseksi keskeytyksen jälkeen tarvittava ohjelmalaskuri — laitetaan talteen. Toisen prosessin annetaan ajaa seuraavan ”aikaviipaleen”, 0,02 s, aikana kontekstietojen lataamisen jälkeen.

Päätös, mikä prosessi pitää seuraavasti *vuorontaa*, on aihe, josta on kirjoitettu paksuja kirjoja. Sen on oltava prosessi, joka on ”ajokelpoinen”, eikä se saa esimerkiksi odottaa käyttäjän datansyöttöä. Sen *prioriteetin* on oltava riittävän korkea. Interaktiivisille prosesseille annetaan korkea prioriteetti, kun taas eräajot suoritetaan matalalla prioriteetilla. Monen käyttäjän ympäristössä tulisi olla mekanismi valvomattomien eräajojen prioriteetin alentamiseksi vapaaehtoisesti: nice-komento.

Jokaisella prosessilla — erityisesti ytimen tai järjestelmätason prosesseilla — on koodissaan pätkeä, joiden aikana keskeytyminen olisi väärin tai tuhoisaa. Esimerkki tästä on tiedon siirtäminen muistiin kiin-

tolevysektorilta, kun tieto kiittää lukupään ohitse. Ihmisinä tiedämme surullisen hyvin, että jotkut tehtävät ovat sen luonteisia, ettei niitä yksinkertaisesti voi suorittaa ilman työrauhaa. Jos meidät keskeytetään, on aloitettava jälleen alusta, ellei pahempaa. Tietokoneet eivät ole poikkeus tästä.

Siksi on mahdollista *peittää* keskeytyksiä. Kriittiset ydinrutiinit peittävät kello- ja muut keskeytykset, eli kytkevät ne pois päältä. Kun ydinrutiini on saatu suoritetuksi, keskeytykset kytketään taas päälle eli *paljastetaan*.



D.2.6 Tosiaikaiskäytön vaatimukset

Tosiaikaiskäytön edellytykset ovat seuraavat.

- 1) On tiedettävä etukäteen, mitkä prosessit ovat käynnissä järjestelmässä. Siksi esimerkiksi monen käyttäjän palvelimen kaltainen ympäristö, johon ihmiset voivat kirjautua ja jossa he voivat käynnistää mielivaltaisia prosesseja, ei ole hyväksyttävä.
- 2) On tiedettävä etukäteen, mitkä ovat suoritusajan suhteen *pisimmät* koodipätkät ajokelpoisten prosessien sisällä, *joiden aikana niitä ei saa keskeyttää*. Niiden kestojen on oltava hyväksyttävän lyhyitä.
- 3) Tosiaikaisuuskriittisille prosesseille tulee antaa korkein prioriteetti, kaikille muille matalampi prioriteetti.
- 4) Vuoronvaihdon aikavälin on oltava sopivan lyhyt, 0,02 s voi olla liian pitkä.
- 5) Järjestelmän kokonaiskäsitteilytehon on oltava riittävä
 - (a) keskimäärin kaikille prosesseille
 - (b) *kaikkina ajankohtina* ja *kaikille* tosiaikaisille prosesseille yhdessä.

”Kovan” tosiaikaisuuden vaatimuksen täyttäminen on haastavaa, ja se vaatii laajaa kuormitustestausta ja huomattavaa suorituskyvyn ylivoimaa. Usein on viisasta kysyä, tarvitaanko oikeasti kovaa tosiaikaisuutta ja hyväksyä jotakin vaatimattomampaa. Esimerkiksi audiolähetysten tai videoiden Internetin suoratoisto-ohjelmistot ottavat Internetin ei-tosiaikaisen luonteen huomioon *puskuroimalla*, siis keräämällä sisään tulevat datapaketit puskuuriin, jonka avulla voidaan luoda jatkuva ääni- ja videokokemus, vaikka osa paketeista saapuisi melko myöhään. Kompromissin hintana on muutaman sekunnin viive. Tämä on hyvinkin

huomattavissa, jos sama suora lähetys nähdään myös analogisena, mutta tallenteita toistettaessa asialla ei ole merkitystä.

Kirjallisuutta

David W. Allan. Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*, 54(2):221–230, 1966. URL <https://doi.org/10.1109/PROC.1966.4634.187>

Allan's Time. The Allan Variance. URL <http://www.allanstime.com/AllanVariance/>. Avattu 6. toukokuuta 2019. 186

Analog Devices. Data Sheet ADXL103/ADXL203 Rev. F. URL https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/adxl103_203.pdf. Avattu 11. heinäkuuta 2020. 291

Neil Ashby. Relativity in the Global Positioning System. *Living Reviews in Relativity*, 55, 01 2003. URL <https://doi.org/10.12942/lrr-2003-1>. 166, 167

Jose Ángel Ávila Rodríguez. Galileo Signal Plan. *ESA Navipedia*, 2011. URL https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Galileo_Signal_Plan. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 261

Willem Baarda. *A testing procedure for use in geodetic networks*, nide 2 no. 5 sarjassa *Publications on geodesy, new series*. Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1968. URL <https://www.ncgeo.nl/downloads/09Baarda.pdf>. Avattu 14. toukokuuta 2019. 236

Tulu Besha Bedada. *Absolute geopotential height system for Ethiopia*. Väitöskirja, University of Edinburgh, 2010. URL <http://www.era.lib.ed.ac.uk/handle/1842/4726>. Avattu 11. toukokuuta 2019. 271

BeiDou Constellation Status. GLONASS Information and Analysis Center for Positioning, Navigation and Timing. URL <https://www.glonass-iac.ru/en/BEIDOU>. Avattu 7. toukokuuta 2019. 262

BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B2a (Version 1.0). PDF, China

- Satellite Navigation Office, 2017. URL <http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201806/P020180608518432765621.pdf>. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 262
- BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B1C (Version 1.0). PDF, China Satellite Navigation Office, 2018a. URL <http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201806/P020180608519640359959.pdf>. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 262
- BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B3I (Version 1.0). PDF, China Satellite Navigation Office, 2018b. URL <http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201806/P020180608516798097666.pdf>. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 262
- BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B1I (Version 3.0). PDF, China Satellite Navigation Office, 2019. URL <http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201902/P020190227702348791891.pdf>. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 262
- BeiDou Introduction. CSNO-TARC, Test and Assessment Research Center of China Satellite Navigation Office. URL <http://www.csno-tarc.cn/en/system/introduction>. Avattu 17. huhtikuuta 2020. 262
- BeiDou Navigation Satellite System. Serve the World and Benefit Mankind. URL <http://en.beidou.gov.cn/>. Avattu 29. toukokuuta 2020. 261
- BKG, NTRIP v. 1.0. Networked Transport of RTCM via Internet Protocol (NTRIP) — Version 1.0. URL <https://igs.bkg.bund.de/rootftp/NTRIP/documentation/NtripDocumentation.pdf>. Avattu 5. toukokuuta 2019. 212
- BKG, RTCM-3 Message Types. RTCM standard 10403.2 – Differential GNSS services – version 3. URL <https://igs.bkg.bund.de/ntrip/rtcmmessagestypes>. Avattu 13. kesäkuuta 2020. 210
- John M. Brozena. The Greenland Aerogeophysics Project: Airborne gravity, topographic and magnetic mapping of an entire continent. International Association of Geodesy Symposia nide 110, sivut 203–214, Wien, Itävalta, 20. elokuuta 1992. Springer, New York, New York. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9255-2_19. 270
- Rory Carroll. Bell did not invent telephone, US rules. *Guardian*, 17. kesäkuuta 2002. URL <https://www.theguardian.com/world/2002/jun/17/humanities.internationaleducationnews>. Avattu 30. huhtikuuta 2020. 307

- Liang Chen, Ling Pei, Heidi Kuusniemi, Yuwei Chen, Tuomo Kröger ja Ruizhi Chen. Bayesian fusion for indoor positioning using Bluetooth fingerprints. *Wireless Personal Communications*, 70(4):1735–1745, 2013. URL <https://doi.org/10.1007/s11277-012-0777-1>. Avattu 18. toukokuuta 2019. 293
- Ruizhi Chen, Felix Toran-Marti ja Javier Ventura-Traveset. Access to the EGNOS signal in space over mobile-IP. *GPS Solutions*, 7:16–22, 2003. URL <https://doi.org/10.1007/s10291-003-0050-x>. 252
- W. H. Clohessy ja R. S. Wiltshire. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, 27(9), 1960. URL <https://doi.org/10.2514/8.8704>. 133, 153
- Control Segment. GPS Interface Control Documents, 2018. URL <https://www.gps.gov/systems/gps/control/>. Avattu 5. elokuuta 2020. 160
- M. A. R. Cooper. *Control Surveys in Civil Engineering*. Collins, Department of Civil Engineering, The City University, London, 1987. 112
- John Peter Costas. Synchronous communications. *Proceedings of the IRE*, 44(12): 1713–1718, 1956. URL <https://doi.org/10.1109/JRPROC.1956.275063>. 183
- Michael W. Davidson ja Kirill I. Tchourioukanov. Newton’s prism experiments. URL <https://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/newton/>. Avattu 1. huhtikuuta 2020. 36
- Jared Diamond. *Guns, Germs, and Steel: The Fates of Human Societies*. Norton, New York, New York, 1999. 3
- David Dickinson. Remembering John Houbolt: the man who gave us lunar orbit rendezvous. *Universe Today*, 2014. URL <https://www.universetoday.com/111424/remembering-john-houbolt-the-man-who-gave-us-lunar-orbit-rendezvous/>. Avattu 4. toukokuuta 2019. 51
- Edgar Durbin. Wikimedia Commons, Teterboro, ST-124 uncovered, 2004. URL [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ST-124_uncovered_\(IMGP3445\).JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ST-124_uncovered_(IMGP3445).JPG). © 2004 Edgar Durbin (GFDL). Avattu 4. toukokuuta 2019. 111
- EDAS. European Global Navigation Satellite Systems Agency (GSA). URL <https://www.gsa.europa.eu/egnos/edas>. Avattu 18. heinäkuuta 2020. 252
- EDAS Service Definition Document. European Global Navigation Satellite Systems Agency (GSA), 2019. URL https://egnos-user-support.essp-sas.eu/new_egnos_ops/sites/default/files/library/official_docs/egnos_edas_sdd_in_force.pdf. Avattu 14. elokuuta 2020. 252

- Carsten Egevang, Iain J. Stenhouse, Richard A. Phillips, Ævar Petersen, James W. Fox ja Janet R. D. Silk. Tracking of Arctic terns *Sterna paradisaea* reveals longest animal migration. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2010. URL <https://doi.org/10.1073/pnas.0909493107>. i
- ESA, Galileo Navigation Signals and Frequencies. URL http://www.esa.int/Our_Activities/Navigation/Galileo/Galileo_navigation_signals_and_frequencies. Avattu 7. toukokuuta 2019. 260
- ESA, Introducing GOCE. URL https://www.esa.int/Our_Activities/Observing_the_Earth/GOCE/Introducing_GOCE. Avattu 5. toukokuuta 2019. 273
- European GNSS Service Centre. Constellation Information. URL <https://www.gsc-europa.eu/system-service-status/constellation-information>. Avattu 16. huhtikuuta 2020. 260
- Exploratorium, Never Lost. URL <https://annex.exploratorium.edu/neverlost/>. Avattu 3. toukokuuta 2019. 3
- René Forsberg, Klaus Hehl, Luísa Bastos, Arne Gidskehaug ja Uwe Mayer. Development of an airborne geoid mapping system for coastal oceanography (AGMASCO). Kokoelmassa *Segawa ym. (1996)*, sivut 163–170. URL https://rd.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-662-03482-8_24. Avattu 18. toukokuuta 2019. 271
- René Forsberg, Arne V. Olesen, Hasan Yildiz ja Carl Christian Tscherning. Polar gravity fields from GOCE and airborne gravity. Julkaisussa *4th International GOCE User Workshop*, TU Munich, Saksa, 2011. URL https://earth.esa.int/download/goce/4th_Int_GOCE_User_Wkshp_2011/Polar_Gravity_Fields_GOCE_Airborne%20Gravity_R.Forsberg.pdf. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 271
- Galileo OS SiS ICD. Galileo Open Service Signal-in-Space Interface Control Document. PDF, European Union, 2016. URL <https://www.gsc-europa.eu/sites/default/files/sites/all/files/Galileo-OS-SIS-ICD.pdf>. Avattu 9. elokuuta 2020. 260
- Miguel García-Fernández, Markus Markgraf ja Oliver Montenbruck. Spin rate estimation of sounding rockets using GPS wind-up. *GPS Solutions*, 12: 155–161, 2008. 171
- GDGPS APPS. Automatic Precise Positioning Service of the Global Differential GPS System. URL http://apps.gdgps.net/apps_file_upload.php. Avattu 10. toukokuuta 2019. 252
- GFZ, CHAMP — Challenging Minisatellite Payload. URL <https://www.gfz-potsdam.de/champ/>. Avattu 5. toukokuuta 2019. 273



GLAD. Global ARAIM for Dual-Constellation webinar. European Global Navigation Satellite Systems Agency (GSA), 2020. URL <https://www.gsa.europa.eu/newsroom/european-space-expo/global-araim-dual-constellation-webinar>. Avattu 27. heinäkuuta 2020. 238

Global Positioning Systems Directorate. URL <https://www.losangeles.af.mil/About-Us/Fact-Sheets/Article/343713/global-positioning-systems-directorate/>. Avattu 7. toukokuuta 2019. 253

GLONASS ICD. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, Navigational Radiosignal in Bands L1, L2. PDF, Russian Institute of Space Device Engineering, Moskova, 2008. URL http://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD_GLONASS_eng_v5.1.pdf. PAINOS 5.1. Avattu 26. toukokuuta 2020. 256

GLONASS ICD CDMA. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, General Description of Code Division Multiple Access Signal System. PDF, Russian Space Systems, JSC, Moskova, 2016a. URL <http://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD-GLONASS-CDMA-General-Edition-1.0-2016.pdf>. PAINOS 1.0. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 258

GLONASS ICD CDMA. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, Code Division Multiple Access Open Service Navigation Signal in L1 Frequency Band. PDF, Russian Space Systems, JSC, Moskova, 2016b. URL <http://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD-GLONASS-CDMA-L1-Edition-1.0-2016.pdf>. PAINOS 1.0. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 258

GLONASS ICD CDMA. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, Code Division Multiple Access Open Service Navigation Signal in L2 Frequency Band. PDF, Russian Space Systems, JSC, Moskova, 2016c. URL <http://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD-GLONASS-CDMA-L2-Edition-1.0-2016.pdf>. PAINOS 1.0. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 258

GLONASS ICD CDMA. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, Code Division Multiple Access Open Service Navigation Signal in L3 Frequency Band. PDF, Russian Space Systems, JSC, Moskova, 2016d. URL <http://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD-GLONASS-CDMA-L3-Edition-1.0-2016.pdf>. PAINOS 1.0. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 258



- GLONASS news. GLONASS Information and Analysis Center for Positioning, Navigation and Timing. URL <https://www.glonass-iac.ru/en>. Avattu 7. toukokuuta 2019. 256
- GMV. QZSS. *ESA Navipedia*, 2011. URL <https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/QZSS>. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 249
- Saurabh Godha, Gérard Lachapelle ja Elizabeth Cannon. Integrated GPS/INS system for pedestrian navigation in a signal degraded environment. Julkaisussa *ION GNSS 2006*, 26-29 September, Fort Worth, Texas, 2006. URL https://schulich.ualgary.ca/labs/position-location-and-navigation/files/position-location-and-navigation/godha2006_conference.pdf. Avattu 12. elokuuta 2020. 292
- Robert Gold. Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 13(4):619–621, 1967. URL <https://doi.org/10.1109/TIT.1967.1054048>. 173, 299
- Google Play, Sky Map. URL <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.google.android.stardroid&hl=en>. Avattu 7. toukokuuta 2019. 276
- GPS ICD. GPS Interface Control Documents, 2019. URL <https://www.gps.gov/technical/icwg/>. Avattu 5. kesäkuuta 2020. 160
- Weikko A. Heiskanen ja Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, Lontoo, 1967. 47
- Hexagon, SPAN GNSS Inertial Navigation Systems. URL <https://www.novatel.com/products/span-gnss-inertial-systems/>. Avattu 9. toukokuuta 2019. 286
- George William Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8: 1–36, 1886. URL <https://doi.org/10.1007/BF02417081>. 133
- Bernhard Hofmann-Wellenhof, Herbert Lichtenegger ja James Collins. *GPS Theory and Practice*. Springer-Verlag, neljäs, tarkistettu painos, 1997. 133
- Walter Hohmann. The attainability of heavenly bodies. Technical translation F44, NASA, 1925. URL https://archive.org/details/nasa_techdoc_19980230631. Avattu 12. elokuuta 2020. 157
- International GNSS Service. IGS Products. URL <http://www.igs.org/products>. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 206
- James W. Fox. Intigeo® series geolocator, 2018. URL <http://www.migratetech.co.uk/IntigeoSummary.pdf>. Avattu 19. kesäkuuta 2020. 294



- Volker Janssen. A comparison of the VRS and MAC principles for network RTK. Julkaisussa *International Global Navigation Satellite Systems Society Symposium*, 2009. URL https://www.spatial.nsw.gov.au/__data/assets/pdf_file/0003/129414/2009_Janssen_IGNSS2009_VRS_vs_MAC.pdf. Avattu 8. elokuuta 2020. 230
- Christopher Jekeli. *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. Walter de Gruyter, Berliini – New York, 2001. 45, 97, 110, 112
- Jet Propulsion Laboratory, The Global Differential GPS System. URL <http://www.gdgps.net>. Avattu 9. toukokuuta 2019. 251
- Ulla Kallio. *Tasotuslasku*. 587. Otatieto, 1998. ISBN 978-9-5167-2267-5. 85
- Rudolf E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45, 1. maaliskuuta 1960. URL <https://doi.org/10.1115/1.3662552>. 51
- Rudolf E. Kalman ja Richard S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(1):95–108, 1. maaliskuuta 1961. URL doi.org/10.1115/1.3658902. 51
- Dennis Kawaharada. The Settlement of Polynesia, Part 1. URL <http://paulwaters.com/learning-hawaiian-culture/the-settlement-of-polynesia-part-1/>. Avattu 3. toukokuuta 2019. 3
- A. D. King. Inertial navigation – forty years of evolution. *GEC Review*, 13(3): 140–149, 1998. URL http://www.imar-navigation.de/downloads/papers/inertial_navigation_introduction.pdf. Avattu 18. toukokuuta 2019. 109
- Brian Koberlein. Galileo’s discovery of Jupiter’s moons, and how it changed the world. *Forbes*, 2016. URL <https://www.forbes.com/sites/briankoberlein/2016/01/07/galileos-discovery-of-jupiters-moons-and-how-it-changed-the-world/>. Avattu 2. toukokuuta 2020. 5
- Leica Geosystems. Take it to the MAX! White paper, 2005. URL https://www.smartnetna.com/documents/Leica_GPS_SpiderNET-Take_it_to_the_MAX_June2005_en.pdf. Avattu 16. elokuuta 2020. 230
- Dennis P. Lettenmaier. Detection of trends in water quality data from records with dependent observations. *Water Resources Research*, 12(5):1037–1046, 1976. doi: 10.1029/WR012i005p01037. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/WR012i005p01037>. 32
- Bethany Lindsay. The compasses of birds. *The Science Creative Quarterly*, 2006. URL <http://www.scq.ubc.ca/the-compasses-of-birds/>. Avattu 3. toukokuuta 2019. 3

- Tao Liu, Xing Zhang, Qingquan Li ja Zhixiang Fang. A visual-based approach for indoor radio map construction using smartphones. *Sensors*, 17(8), 2017. URL <https://dx.doi.org/10.3390%2Fs17081790>. 293
- Jiangang Ma, Yikang Yang, Hengnian Li ja Jisheng Li. Expressions for the autocorrelation function and power spectral density of BOC modulation based on convolution operation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020 (2063563), 2020. URL <https://doi.org/10.1155/2020/2063563>. 180
- MathPages, The Sagnac Effect. URL <https://www.mathpages.com/rr/s2-07/2-07.htm>. Avattu 3. elokuuta 2020. 110
- Muhammad Al Amin Amali Mazlan, M. H. Md Khir, Naufal M. Saad ja S. C. Dass. WiFi fingerprinting indoor positioning with multiple access points in a single base station using probabilistic method. *International Journal of Applied Engineering Research*, 12(6):1102–1113, 2017. URL https://www.ripublication.com/ijaer17/ijaerv12n6_45.pdf. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 293
- Dalkhaa Munkhtsetseg. Geodetic network and geoid model of Mongolia. Julkaisussa *Proceedings, GSEM (Geospatial Solutions for Emergency Management)* 2009, Beijing, Kiina, 2009. ISPRM. URL http://www.isprs.org/proceedings/XXXVIII/7-C4/121_GSEM2009.pdf. Avattu 18. toukokuuta 2019. 271
- Michael John Muuss. The Story of the PING Program, ilman päivämäärää. URL <https://www.webcitation.org/5saCKBpgH>. Avattu 7. toukokuuta 2019. 311
- NASA Spinoff. NASA Brings Accuracy to World's Global Positioning Systems. URL https://spinoff.nasa.gov/Spinoff2019/ps_1.html. Avattu 12. kesäkuuta 2020. 242, 252
- Søren Vedel Nielsen. Wikimedia Commons, LC-130 take-off, Greenland, 2005. URL <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LC130-Takeoff-Greenland.swn.jpg>. © 2005 Søren Vedel Nielsen (GFDL, CC BY SA 2.5). Avattu 26. heinäkuuta 2019. 271
- James Robert Nockson. Wikimedia Commons, Ring laser gyroscope produced by Ukrainian "Arsenal" factory on display at MAKS-2011 airshow, 2011. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ring_laser_gyroscope_at_MAKS-2011_airshow.jpg. © 2011 James Robert Nockson (CC BY-SA 3.0). Avattu 4. toukokuuta 2019. 100
- Office of Aeronautical Satellite Systems, ATS Engineering Division, Japan Civil Aviation Bureau. Overview of MSAS, 2008. URL <https://web.archive.org/web/20151106015542/http://>



//www.unoosa.org/pdf/icg/2008/icg3/o8-1.pdf. Avattu 28. toukokuuta 2020. 245

Mikko Parviainen. *Self-localization in Ad Hoc Indoor Acoustic Networks*. Väitöskirja, Tampere University of Technology, 7. lokakuuta 2016. URL https://tutcris.tut.fi/portal/files/9349910/parviainen_1420.pdf. Avattu 18. toukokuuta 2019. 293

Physics Classroom, Kepler's Three Laws. URL <https://www.physicsclassroom.com/class/circles/Lesson-4/Kepler-s-Three-Laws>. Avattu 3. elokuuta 2020. 133

Markku Poutanen. *Satelliittipaikannus*. Ursa, Helsinki, 2017. ISBN 978-9-5259-8541-2. 133, 160, 166

QZSS PS/IS. Performance Standard (PS-QZSS) and Interface Specification (IS-QZSS). Verkkosivu, Cabinet Office, National Space Policy Secretariat, 2020. URL <https://qzss.go.jp/en/technical/ps-is-qzss/ps-is-qzss.html>. Avattu 25. heinäkuuta 2020. 249

Jean M. Rüeger. Refractive indices of light, infrared and radio waves in the atmosphere. *UNISURV report S 68*, School of Surveying and Spatial Information Systems, University of New South Wales, 2002. 198

Daniel Porras Sánchez ja César Pisonero Berges. The EGNOS SBAS message format explained. *ESA Navipedia*, 2006. URL https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/The_EGNOS_SBAS_Message_Format_Explained. Avattu 18. kesäkuuta 2020. 241

Jiri Segawa, Hiromi Fujimoto ja Shuhei Okubo, toim. *Proceedings, IAG International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy (GraGeoMar96)*, nide 117 sarjassa *International Association of Geodesy Symposia*, Tokio, Japani, 30. syyskuuta – 5. lokakuuta 1996. Springer-Verlag. 324, 330

Nagaraj C Shivaramaiah ja Andrew G Dempster. The Galileo E5 AltBOC: understanding the signal structure. Julkaisussa *International Global Navigation Satellite Systems Society Symposium*, 2009. URL https://www.researchgate.net/publication/242169981_The_Galileo_E5_AltBOC_Understanding_the_Signal_Structure. Avattu 13. kesäkuuta 2020. 180

Lina Sinjab. Replica Phoenician ship ends round-Africa journey. *BBC.com*, 2010. URL <https://www.bbc.com/news/av/world-africa-11615613/replica-phoenician-ship-ends-round-africa-journey>. Avattu 3. toukokuuta 2019. 3

Sky Map Devs, Stardroid. URL <https://github.com/sky-map-team/stardroid/blob/>



- 55b83c2aa46b071f62f3eb72996a5e7b6640ef7a/app/src/main/java/com/google/android/stardroid/control/AstronomerModelImpl.java. Avattu 22. toukokuuta 2020. 279
- Dava Sobel. *Longitude. The True Story of a Lone Genius who Solved the Greatest Scientific Problem of his Time*. Penguin, New York, 1995. 5
- Joël Sommeria. Foucault and the rotation of the Earth. *Comptes Rendus Physique*, 18:520–525, 2017. URL <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2017.11.003>. 99
- SPS performance standard. Global Positioning System Standard Positioning Service Performance Standard, 2020. URL <https://www.gps.gov/technical/ps/2020-SPS-performance-standard.pdf#page=47>. Avattu 26. kesäkuuta 2020. 254
- Gilbert Strang ja Kai Borre. *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley — Cambridge Press, 1997. 15, 52, 159
- Jaume Sanz Subirana, José Miguel Juan Zornoza ja Manuel Hernández-Pajares. Reference frames in GNSS. *ESA Navipedia*, 2011. URL https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Reference_Frames_in_GNSS. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 257
- Byron D. Tapley ja Bob E. Schutz. Estimation of unmodeled forces on a lunar satellite. *Celestial Mechanics*, 12:409–424, joulukuu 1975. URL <https://doi.org/10.1007/BF01595388>. 84
- Peter J. G. Teunissen, Paul J. de Jonge ja Christiaan C. J. M. Tiberius. Performance of the LAMBDA method for fast GPS ambiguity resolution. *Navigation*, 44(3):373–383, 1997. URL <https://doi.org/10.1002/j.2161-4296.1997.tb02355.x>. 220
- TU Delft, LAMBDA. Download LAMBDA and Ps-LAMBDA source code. URL <https://www.tudelft.nl/citg/over-faculteit/afdelingen/geoscience-remote-sensing/research/lambda/lambda/>. Avattu 6. toukokuuta 2019. 223
- University of Texas, GRACE — Gravity Recovery and Climate Experiment. URL <http://www2.csr.utexas.edu/grace/>. Avattu 5. toukokuuta 2019. 273
- USGS Open-File Report 2008-1089. Airborne Gravity Survey and Ground Gravity in Afghanistan: A Website for Distribution of Data. URL https://pubs.usgs.gov/of/2008/1089/Afghan_dataproc.html. Avattu 25. kesäkuuta 2020. 272
- Ming Wei ja Klaus-Peter Schwarz. Comparison of different approaches to airborne gravimetry by strapdown INS/GPS. Kokoelmassa *Segawa ym.* (1996), sivut 155–162. URL



https://rd.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-662-03482-8_23.

Avattu 18. toukokuuta 2019. 268

Todd R. Weiss. Out-of-memory problem caused Mars rover's glitch.

Computerworld, 2004. URL

<https://www.computerworld.com/article/2574759/out-of-memory-problem-caused-mars-rover-s-glitch.html>. Avattu 30. huhtikuuta 2020. 313

Greg Welch ja Gary Bishop. The Kalman Filter. URL

<https://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/>. Avattu 4. toukokuuta 2019. 52

Greg Welch ja Gary Bishop. Course 8: An introduction to the Kalman Filter.

Julkaisussa *SIGGRAPH 2001, Los Angeles, August 12-17*. 2001. URL https://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_Slides_o8.pdf.

Avattu 4. toukokuuta 2019. 52

Paul Wessel, W. H. F. Smith, Remco Scharroo, J. Luis ja F. Wobbe. Generic

Mapping Tools: improved version released. *EOS Trans. AGU*, 94(45):

409–410, 2013. URL <http://dx.doi.org/10.1002/2013EO450001>. ii

Wikimedia Commons, Barnacle geese. URL

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MigrationFlock.jpg>. © 2006

User:Thermos (CC BY-SA 2.5). Avattu 3. toukokuuta 2019. 4

Wikimedia Commons, Gyroscope. URL

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3D_Gyroscope-no_text.png. ©

2006 User:LucasVB (PD). Avattu 3. toukokuuta 2019. 100

Wikimedia Commons, Harrison's chronometer H5. URL

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harrison%27s_Chronometer_H5.JPG. © 2007 User:Racklever (GFDL).

Avattu 3. toukokuuta 2019. 4

Wikimedia Commons, Polynesian migration. URL

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polynesian_Migration.svg. ©

2008 David Eccles (CC BY 4.0). Avattu 14. heinäkuuta 2019. 3

Wikimedia Commons, Votive offering. URL

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Votivskepp.JPG>. © 2009

User:Svenboatbuilder (CC BY-SA 3.0 Unported). Avattu 21. elokuuta 2020. 2

Wikipedia, Brownian bridge. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_bridge. Avattu 10. toukokuuta 2020. 91

Wikipedia, Cochrane-Orcutt estimation. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Cochrane%E2%80%93Orcutt_estimation.

Avattu 30. kesäkuuta 2020. 31



Wikipedia, Damping ratio. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Damping_ratio. Avattu 4. toukokuuta 2019.
120

Wikipedia, Dandelin spheres. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres. Avattu 27. kesäkuuta 2020. 134

Wikipedia, Datafuusio. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/Datafuusio>.

Avattu 7. toukokuuta 2019. 275

Wikipedia, Dead reckoning. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Dead_reckoning. Avattu 3. toukokuuta 2019. 2

Wikipedia, Domain Name System. URL <https://fi.wikipedia.org/wiki/DNS>.

Avattu 31. heinäkuuta 2020. 311

Wikipedia, Hallin ilmiö. URL

<https://fi.wikipedia.org/wiki/Hall-ilmi%C3%B6>. Avattu 29. toukokuuta 2020. 290

Wikipedia, Indoor positioning system. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Indoor_positioning_system. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 293

Wikipedia, Magnus expansion. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_expansion. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 66

Wikipedia, Max Schuler. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Schuler.

Avattu 31. heinäkuuta 2020. 120

Wikipedia, Orbital elements. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 134

Wikipedia, PIGA accelerometer. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/PIGA_accelerometer. Avattu 4. heinäkuuta 2020. 108

Wikipedia, Polynesian navigation. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Polynesian_navigation. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 3

Wikipedia, Receiver autonomous integrity monitoring. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Receiver_autonomous_integrity_monitoring.

Avattu 8. toukokuuta 2020. 235



Wikipedia, Superluminal motion. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Superluminal_motion. Avattu 16. elokuuta 2020. 197

Wikipedia, V-2 rocket. URL https://en.wikipedia.org/wiki/V2_rocket.

Avattu 31. heinäkuuta 2020. 6

Wikipedia, Värähtelypiiri. URL

<https://fi.wikipedia.org/wiki/V%C3%A4r%C3%A4htelypiiri>. Avattu 29. toukokuuta 2020. 290

Wikipedia, Vibrating structure gyroscope. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrating_structure_gyroscope. Avattu 2. toukokuuta 2019. 291

Wikipedia, Woodbury matrix identity. URL

https://en.wikipedia.org/wiki/Woodbury_matrix_identity. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 303

Wolfram Functions, $\int e^{bx} \cos cx \, dx$. URL <http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Cos/21/01/02/04/01/01/0002/>.

Avattu 3. huhtikuuta 2020. 45

Wolfram Functions, $\int \exp bx^2 \cos cx \, dx$. URL <http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Cos/21/01/02/04/01/05/0002/>.

Avattu 14. toukokuuta 2020. 47

Wolfram MathWorld, Statistical Correlation. URL

<http://mathworld.wolfram.com/StatisticalCorrelation.html>. Avattu 4. toukokuuta 2019. 22

Jiuntsong Wu, Sienchong Wu, George A. Hajj, Willy I. Bertiger ja Stephen M. Lichten. Effects of antenna orientation on GPS carrier phase. *manuscripta geodaetica*, 18:91–98, 1993. 170

Xinhua. China's BeiDou officially goes global. *Silk Road News*, 2018. URL

<http://en.silkroad.news.cn/2018/1228/125586.shtml>. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 262

Jiexin Zhang, Alastair R. Beresford ja Ian Sheret. SensorID: Sensor calibration fingerprinting for smartphones. *IEEE Symposium on Security and Privacy (SP)*, 2019. URL <https://doi.org/10.1109/SP.2019.00072>. 280

Yinzhi Zhao, Peng Zhang, Jiming Guo, Xin Li, Jinling Wang, Fei Yang ja Xinzhe Wang. A new method of high-precision positioning for an indoor pseudolite without using the known point initialization. *Sensors*, 18(6), 2018. URL <https://doi.org/10.3390/s18061977>. 293

Hakemisto

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZÄÖ

A

- aaltoviiva ~, 98
- active spare*, 159
- Afganistan, 272
- Afrikka, ympäripurjehdus, 3
- aikajakokanavointi (TDMA), 290
- aikajakomultipleksointi (TDM), 255, 256, 259
- aikasarja, 17, 27
- aikaviipale, 317
- Air Force Satellite Control Network (AFSCN), 160
- ajastusennakko, 290
- akustinen paikannus, 293
- alikantoaalto, 179
- aliohjelma, 314
- Allan, David W., 186
- Allanin keskihajonta, 186
- Allanin varianssi, 186
- almanakka, 161
- AltBOC, 180
- American Telephone & Telegraph (AT&T), 307
- amplitudimodulaatio, 305
- anomalial
 - eksentrinen, 135
 - luonnollinen, 135
- antennin suuntaus, 167, 170
- antipodi, 256
- anturifuusio, 14, 275
 - heterogeeninen, 275, 286
 - homogeeninen, 275, 287
 - löysästi integroitu, 275
 - tiivisti integroitu, 275
- apogeum, 134, 136
- apogeumin roikunta, 248
- Apollo (kuuohjelma), 51
- apsidiprekessio, 248
- AR(1)-prosessi, 41
- arvojoukko, 15, 18
- arvovälitteisyys, 315
- asennonmittaus, 287
- asento, kulkuneuvon, 8, 9, 98, 109, 287
- assimilaatio, datan, 232
- atomikello, 10, 160, 167, 185, 196, 251
- atsimuutti, 112, 129, 207, 282
 - gyroskoopin akselin, 118
- autokorrelaatio
 - määritelmä, 34
- ajassa, 32
- syklinen, 173, 174
- autokovarianssi
 - määritelmä, 32
 - satunnaiskulku, 38
 - valkoinen kohina, 38
- Automatic Precise Positioning Service (APPS), 252
- avaruusgravimetria, 271
- avaruuslohko
 - EGNOS, 245
 - GLONASS, 258
 - GPS, 159
 - WAAS, 242
- avoin palvelu (Galileo), 261
- avustettu GNSS (A-GNSS), 290

B

- barysentriset koordinaatit, 227, 228
- BeiDou, 261, 262
- Bell, Alexander Graham, 307
- binaarinen offset kantoaalto (BOC), 178
- binaarinen taajuusavainnus (BFSK), 309
- binaarinen vaiheavainnus (BPSK), 163, 177, 239, 257
- bittinopeus, *katso* kooditaajuus
- blokki (GPS), 159, 253
- Bluetooth, 293
- Brahe, Tycho, 133
- Brennschluss*, 6, 108

broadcast ephemeris, katso lähetetyt ratatiedot
 Bucy, Richard, 51
 Bundesamt für Kartographie und Geodäsie (BKG), 210, 212

C

HMS Carlskrona (laiva), 2
 Cauchyn ja Lorentzin jakauma, 45
 CHAMP (satelliitti), 273
 chip rate, *katso* kooditaajuus
Civil Long -koodi, 255
Civil Moderate -koodi, 255
 Clohessyn ja Wiltshiren malli, 153
 CNAV, 161
 Cochranen ja Orcuttin menetelmä, 31
 Colorado Springs, 160
 Commodore 64, 309
concessionaire (Galileo), 259
 corioliskiihtyvyys, 267
 coriolisvoima, 115, 291
 Cospas-Sarsat, 261
 Costasin diskriminaattori, 183, 193

D

Decca, 5
 deltafunktio, 36, 37, 185
 differentiaali-GNSS, 11, 207, 230
 differentiaalikorjaus, 238, 240
 differentiaalipaikannus, 196, 206, 207
 digitaalinen maastomalli, 2
 digitaalinen tilaajayhteys (DSL), 309
 Dirac, Paul, 36
 dispersio, 197
 distribuutio (matematiikka), 36
 dopplersiirtymä, 161, 184, 185, 206
 drooni (UAV), 291
 dynaaminen kohina, 56, 87, 89, 203, 268
 dynaaminen malli, 13, 52, 55
 ilmagravimetria, 269
 inertianavigointi, 127
 kerroinmatriisi, 56
 kulkuneuvon liike, 205
 linearisoitu, 61
 satelliittiradan määrittäminen, 203
 vaihetuettu koodimittaus, 188
dynamic model compensation, 84

E

luku e, 62
 EDAS, 252
 Edison, Thomas Alva, 307
 EGM2008, 116
 eheys, 235, 241, 242, 261, 262
 ekliptika, 135
 eksentrisyys, radan, 135

elektronien kokonaispitoisuus (TEC), 197, 250
 eläinrata, 135
 Enhanced Data Rates for GSM Evolution (EDGE), 311
 ensimmäisen lajin virhe, 237
 epookki, 10, 27, 53, 69
 eranto, 4
 ergodisuus, 18, 34
 erittäin nopeita rataennusteita, 206
 erotuskyky, testin, 237
 eräkäsittely, 86
 esittely, muuttujan, 315
 esivahvistin, 182
 estimaattori
 harhaton, 20, 34, 69
 havaintosuureen, 69
 parannettu, 70
 tilavektorin, 69
 estimointi, 18
 etenemispulun sijainti, 232
 etenemisviive, 199, 203
 ionosfääri, 161, 192, 193, 197, 200, 207, 240, 255
 troposfääri, 192, 193, 197, 207
 kosteus, 201, 203
 kuiva, 201, 203
 Etiopia, 271
 ETRS-89, 10
 Eulerin kulmat, 9, 55, 98
 Eulerin vapaa nutaatio, 103
 Eulerin yhtälö, 102
 Euraasian mannerlaatta, 10
 EUREF-FIN, 10
 Eurocontrol, 245
 Euroopan avaruusjärjestö (ESA), 258
 Euroopan komissio, 245, 258
 European Geostationary Navigation Overlay Service (EGNOS), 245
 European GNSS Agency (GSA), 259
 European Terrestrial Reference Frame (ETRF), 10
expandable constellation (GPS), 254
 Eötvösön korjaus, 268

F

Fisherin F-testi, 223
fix-ratkaisu, 218
float-ratkaisu, 218
Flächenkorrekturparameter (FKP), 230
 foinikialaiset, 3
 Foucault, Léon, 99
 Foucault'n heiluri, 99, 130
 Fourier, Joseph, 43
 Fourier'n käänteismuunnos, 44
 Fourier'n muunnos, 43, 307



Fourier'n teoria, 176
 funktioavaruus, 17
 funktiomalli, 28

G

Galilei, Galileo, 5
 Galileo Joint Undertaking, 259
 Galileo Operating Company, 259
 Galileo-satelliittinavigointijärjestelmä, 258
 Galois, Évariste, 175
 Galois'n teoria, 175
 Gauss, Carl Friedrich, 17
 Gaussin ja Markovin prosessi, 39, 41, 43, 184, 203, 269
 autokovarianssifunktio, 42, 44
 tehon spektraalitiheys, 46
 Gaussin kellokäyrä, 17, 18
 General Packet Radio Services (GPRS), 311
 Generic Mapping Tools (GMT), ii
 geodeettinen paikanmäärittäminen, 1, 12
 geodeettinen viiva, 169, 170
 geodesia, 1
 geodynamiikka, 156
 geoidi, 12
 geoidimalli, 271
 geomagneettinen ekvaattori, 250
 geometrinen kiihtyvyys, 272
 geosentrinen kulmaetäisyys, 122
 geosentrisuus, 8, 9
 geosynkronoinen rata, 247
 geotiede, 51
 GIOVE-A, 260
 globaali navigointisatelliittijärjestelmä (GNSS), 6, 13, 253, 254, 273
 Global Differential GPS (GDGPS), 210, 251
 Global Positioning System (GPS), 1, 5, 10, 13, 235, 253
 Global System for Mobile Communications (GSM), 311
 GNSS-tomografia, 232
 GNSS-vastaanotin, 265, 273
 monen järjestelmän, 258
 GOCE (satelliitti), 273
 Gold, Robert, 173
 Goldin koodi, 163, 175, 239, 240, 299
 GPS:n laskenta- ja ohjauskeskus (MCS), 160
 GPS-Aided Geo Augmented Navigation (GAGAN), 249
 graafinen käyttöliittymä (GUI), 314
 GRACE (satelliittipari), 273
 GRACE Follow-On, 273

Gramin ja Schmidtin ortonormalisointi, 277
 gravimetri, 107, 266
 gravitaatiogradienttitensori, 59, 146, 203, 269
 gravitaatiogradiometri, 273
 Gray, Elisha, 307
 Greenland Aerogeophysics Project, 270
 Greenwich, 141
 Greenwichin meridiaani, 9
 Ground Uplink Station (GUS), 243
 Grönlandin painovoimakartoitus, 270
 gyroskooppi, 98, 99, 103
 kolmiakselinen, 282
 gyroskoopialusta (V-2), 6
 gyroskoopikokoonpano, 110

H

H₅ (kronometri), 4
 Hallin ilmiö, 290
 hana (LFSR), 297
 harha (prosessi), 83
 harmoninen palautuskerroin, 120
 Harrison, John, 4
 Hartebeesthoek (Etelä-Afrikka), 246
 Havaiji, 3
 havaintomalli, 13, 52, 68
 havaintomatriisi, 69
 havaintosuure, 68
 havaintoyhtälö, 27, 188
 geodeettinen paikannus, 204
 GNSS, 191
 satelliitin radanmäärittäminen, 202
 heilurikiihtyvyyssmittari, 107
 gyroskoopipohjainen, 107, 108
 Helmertin muunnos, 11
 Helsinki, 206
 Hertz, Heinrich, 44
 Hill, George W., 142
 Hillin koordinaatisto, 142
 hitausmomentti, 102
 lieriön, 105
 hitaustensori, 100
 Hohmann, Walter, 157
 Hohmannin siirtorata, 157
 homogeenisuus,
 painovoimakartoituksen, 271
 homoskedastisuus, 27
 Hopfieldin malli, 198, 201
 HxGN SmartNet (Leica), 210
 hylkääminen, heijastusten, 164, 168
 hyperbeli, 5
 hyperbelinen paikannus, 5, 6
 hyperellipsoidi, 73
 Hypertext Transfer Protocol (HTTP), 212
 hyrräkompassi, 118, 119, 130, 132

häipyvän muistin suodin, 184

hälytysraja (RAIM), 237

I

ilmagravimetri, 117

ilmagravimetria, 171, 265, 271, 272

skalaari-, 266

vektori-, 266

ilmakehän mallinnus, 231

ilmaruori, 6

ilmentymä, proseduurin, 315

impulssi, 100

inclined geosynchronous orbit (IGSO), 262

independent and identically distributed

(i.i.d.), 27, 195

Indian Mission Control Centre (INMCC),

249

Indian Navigation Link Upload Station

(INLUS), 250

Indian Reference Station (INRES), 249

Indonesia, 271

induktanssi, 290

inertiaalinen koordinaatisto, 102, 141

inertialaki, 97

inertiamittausanturi, 294

inertiamittausyksikkö (IMU), 55, 99, 185

alustus, 131

ilmagravimetria, 266

saappaissa, 292

strapdown, 109

tasaus ja suuntaus, 130

inertianavigoinnin perusyhtälö, 116

inertianavigointi, 1, 6, 13, 97

inertiateknologia, 265

in-flight-kalibrointi, 270

inklinaatio, *katso* ratatason

kaltevuuskulma

integriteetti, *katso* eheys

Interface Control Document (ICD)

BeiDou, 262

Galileo, 260

GLONASS, 256, 258

GPS, 160

QZSS, 249

International Earth Rotation and

Reference Systems Service

(IERS), 9

International Terrestrial Reference Frame

(ITRF), 10

International Terrestrial Reference

System (ITRS), 10

Internet Control Message Protocol

(ICMP), 311

Internet Protocol (IP), 309, 311

Internetin finanssi- ja liiketoiminta, 171

interpolointi tukiasemien välillä, 209, 229

ionimoottori, 273

ionosfäärivapaa havaintosuure, 198

Irak, 259

isoakselin puolikas, 135

issue of data (IOD), 240

itsekonvoluutio, 180

J

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 57

Jacobin determinantti, 49

Jacobin matriisi, 57, 69

jakso, heilurin, 121

Japanese Aerospace Exploration Agency

(JAXA), 247

Jeppesen, 131

Jet Propulsion Laboratory (JPL), 251

jet-assisted take-off (JATO), 271

jiiraus, 9

jousikiiktyvyysmittari, 107

Jupiterin kuut, 5

jyskintä, 9

jäljitelmäkoodi, 162, 174

jäljitelmäsignaali, 182

jääkauden jälkeinen sopeutumisliike

(GIA), 202, 204

jäännösvirhe, 27, 237

K

kaarevuussäde, Maan, 128, 267

kahden blokin bittifunktio, 179

kaikuluotain, 311

Kaisaniemi, Helsinki, 18

kaistaleveys, 307

kaistanpäästösuoitin, 182

kaksoiserotus (havaintosuure), 170, 207,

217, 218

kaksoislogaritminen kuvaaja, 187

kallistuminen (ilmailu), 8

kallistusmittari, 130

Kalman, Rudolf, 51

Kalmanin suodin, 1, 13, 43, 51, 54, 266,

270, 292

laajennettu, 55, 56

kaltevuuskulma, ratatason, 135

BeiDou, 262

Galileo, 259

GLONASS, 257

GPS, 159

Molnija, 248

QZSS, 247

kampasuure, 20

kanavanvaihtosana, 162

Kansainvälinen avaruusasema (ISS), 51

Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio

(IAG), 9



- Kansainvälinen siviili-ilmailujärjestö (ICAO), 241
- Kansainvälinen televiestintäliitto (ITU), 309
- kapasitanssi, 290
- kapasitiivinen lukeminen, 290
- kappalekoordinaatisto, 6
- kardaaninen rengasjärjestelmä, 103, 110
- karkaussekunti, 257
- karkausvuosi, 136
- karkea virhe, 236
- Karlskrona (Ruotsi), 2
- kartoitus, maamerkkien, 2
- kasa, 316
- kasautuminen, varianssien, 20, 63
- kaupunkikanjoni, 247
- kellokeskeytys, 317
- kellokorjaus (SBAS), 240
- kellon mallinnus, 185, 203
- kellopoikkeama, 185
- GNSS-satelliitti, 191, 193, 203
- GNSS-vastaanotin, 191, 193
- Kepler, Johannes, 133
- Keplerin kolmas laki, 144, 146, 155
- Keplerin rata, 133
- Keplerin toinen laki, 138
- Keplerin yhtälö, 139
- keskeisvoimakenttä, 133, 136, 145
- keskeytys, 317
- paljastaminen, 318
- peittäminen, 318
- keskeytyskäsittelijä, 317
- keskeytysvektori, 317
- keskianomalia, 134, 135
- keskiarvo, 20
- painotettu, 93, 188
- painottamaton, 21
- keskihajonta, 17, 19
- keskimerenpinta, 12
- geopotentialiaali, 10
- keskipakoisvoima, 115
- keskivirhe, 17, 19
- kevättasauspiste, 10, 134, 135, 141
- khii-toiseen (χ^2) -jakauma, 222, 237
- Khinchin, Aleksandr, 43
- kiertokysely, 317
- kiihtyvyys, kulkuneuvon, 97
- kiihtyvyysmittari, 98, 99, 106, 265, 266, 273
- herkkyys, 291
- kolmiakselinen, 277, 278
- lineaarinen, 115
- kiikka, 171
- kilpailulainsäädäntö, 307
- KKJ (Kartastokoordinaattijärjestelmä), 11
- Klobucharin malli, 201, 232
- kohdeportti, 312
- kohina
- määritelmä, 36
- havainnon, 27
- kohinavektori, havaintojen, 270
- kokonaistuntematon, 161, 187, 193, 196, 208, 215, 221, 287
- kokonaistuntemattomien ratkaisu, 220
- nopea, 219
- kolmen kappaleen ongelma, 142
- kolmiofunktio, 176
- ko-lokaatio, 209, 218
- komentotulkki (*shell*), 314
- kompassi, magneettinen, 4, 277
- kompleksikonjugaatti (liittoluku), 35
- kondensaattori, 290
- koneoppiminen, 47
- konteksti, prosessin, 317
- konvoluutio, 176
- konvoluutiolause, 176
- koodijakokanavointi (CDMA), 163, 181, 258
- kooditaajuus, 162, 164, 177
- korkea dynamiikka, 184, 185, 205
- korkeuden määrittäminen, 12
- korkeusjärjestelmä, 12
- korkeuskulma, 207
- korkkiruuvi, 164, 169
- korkkiruuvissäätö, 105
- korrelaatio, 22
- määritelmä, 22
- korrelaatiopituus, 32, 232, 269
- korrelaattori, 182
- kosketusnäyttö, 313
- Kourou (Ranskan Guyana), 246
- kovarianssi, määritelmä, 21
- kriging, 47, 186
- kriittinen vaimennus, 120
- Kronecker, Leopold, 59
- Kroneckerin tensori, 37, 59
- kronometri, 4, 5
- kulminaatio, 5
- kutsu, proseduurin, 314
- Kuuba, 2
- kuvausfunktio, 199
- kvadratuuri (modulaatio), 163, 164
- käynti
- gyroskooppi, 283, 285
- kello, 185, 208
- kiihtyvyysmittari, 107
- käyttäjälohko
- EGNOS, 245
- GPS, 159
- käyttöjärjestelmä, 314
- käämi, 290
- kääntäminen (ilmailu), 9



L

laattatekniikka, 202, 204
 laiteajuri, 313, 314
 LAMBDA-menetelmä, 220, 222, 223
 langaton lähiverkko (WLAN), 275, 289, 293
 laseretäisyysmittaus, 79, 192
 lentokoneen liikkeet, 270
 leveäkuja (GPS), 188, 220, 288
 libraatioliike, 149, 150
 liittoluku (kompleksikonjugaatti), 35
 liityntäpiste (NTRIP), 212
 likiarvo, 56, 59, 127, 129
 valinta, 60
 likirata, 59
 lineaarinen estimointi, 13
 lineaarinen regressio, 27
 ei-korreloitu, 31
 lineaarisen palautteen siirtorekisteri (LFSR), 171, 172, 257
 lineaarisuus, anturin, 107
 linearisointi, 56, 58, 126, 269
 litistyneisyys, dynaaminen, 155
 litistyneisyys, Maan, 136, 155
 Lockheed Hercules C-130, 271
 Lockheed Martin, 159
 lohko (GPS), 159
 lukuteoria, 171
 Lunar Orbiter, 84
 luotettavuus, 236
 ulkoinen, 237
 luotiviiva, 6, 117, 207, 267
 lähdeportti, 312
 lähentyminen, teknologioiden, 310
 lähestymiskategoria, 241
 lähetetyt ratatiedot (*broadcast ephemeris*), 196, 202, 206, 239, 240
 lähtöakseli (gyroskooppi), 105, 111, 118
 lävistyskohta, ionosfäärin, 232, 241

M

maakoodi, puhelinverkon, 308
 maalohko
 EGNOS, 245, 246
 WAAS, 244
 maamerkki, 2, 3, 276
 Maan mukana pyörivä koordinaatisto (ECEF), 10, 113, 115, 141, 142, 204
 Maan pyörähdysliike
 keskipakoiskiihtyvyys, 268
 kulmanopeus, 113, 268
 Maan suuntausparametrit (EOP), 202
 maapohjainen parannusjärjestelmä (GBAS), 250
 magneettikenttä

matkapuhelimen oma, 280
 talon sisällä, 293
 magnetometri, 277, 292
 Markov, Andrei, 39
 Markovin ketju, 30, 41
mascon, 84
 Master Control Centre (MCC), 245
 mekanisointi, 13, 125
 merenkulku, 1, 3
 merigravimetri, 117
 merigravimetria, 272
 merinavigointi, 242
 merivirtaus, 3
 merkintälasku, 2
 merkitsevyystaso, testin, 237
 merkkijono, 316
 metrinen tensori, 222
 Meucci, Antonio, 307
Michibiki, 247
 mikroelektroninen kiihtyvyysanturi (MEMS), 106, 108
 mikrotyöstö, 290
 milligal (mGal), 266
 minimaalinen korrelaatio, 173
 mittarilasku (ilmailu), 241, 250, 251
 m-jono, 174, 297
 modeemi, 309
 modulaatio, 305
 Molnija (satelliitti), 248
 Molnijan kiertorata, 248
 Mongolia, 271
 monitie, 164, 168, 270
 Morse-koodi, 305
 MTSAT Satellite-based Augmentation System (MSAS), 245
 Multiple Signal Messages (MSM), 210

N

napaliike, 103, 202
 Navigation Land Earth Station (NLES), 245
 navigointi, *määritelmä*, 1
 navigointiviesti, 161
 GLONASS, 257
 GPS, 160
 neliöeksponentiaalinen autokovarianssi, 46
 neliöinti, signaalin, 184
 Network Time Protocol (NTP), 312
 Networked Transport of RTCM via Internet Protocol (NTRIP), 212
 Newton, Isaac, 97
 Newtonin gravitaatiolaki, 116
 Newtonin toinen liikelaki, 100, 121
 nice (kommento), 317
 nimipalvelu (DNS), 311



nimivälitteisyys, 315
 nollahypoteesi, 237
 nollanopeuspäivitys (ZUPT), 99, 276, 282, 284–286, 292, 294
 nollasuure, 69, 189
 nopea Fourier'n muunnos (FFT), 35, 307
 nopeusvektori, satelliitin, 142
 normaalijakauma, 17, 18
 normaalipainovoimakenttä, 116, 269
 normaaliyhtälö, 28
north-following, 112, 131
 NorthGRIP (Grönlanti), 271
 numeerinen sääennustaminen (NWP), 232
 Nyqvistin lause, 307
 nyökkääminen (ilmailu), 9
 näennäissatunnaiskoodi (PRN), 160, 163, 164, 171, 175, 182, 242, 243
 näkyvyys kiitoradalla (RVR), 241
 näkyvyysalue, muuttujan, 315
 näkölasku (ilmailu), 241
 näkölinjan atsimuutti, 169

O

odotusarvo
 määritelmä, 19
 jäännösvirheiden neliöiden summa, 29
 normaalijakauma, 17
 ohjaus, 6, 51
 ohjelmanlaskuri, 314, 315
 Opportunity (Mars-mönkijä), 313
 optimaalisuus
 Kalmanin suodin, 51, 70, 72
 keskiarvo, 20
 optinen ikkuna, 47
 optinen litografia, 290
 ortonormaali kanta, 53, 98, 124, 134, 223, 277
 Otava (tähdistö), 261

P

paikallinen parannusjärjestelmä (LAAS), 250
 painomatriisi, 88
 painottomuustila, 272
 painovoimahäiriö, 269
 painovoimavektori, 116
 painoyksikön keskivirhe, 29, 195
 paketti (Internet), 311
 pakettikytkentäinen verkko, 311
 pallofunktiokemitelämä, 232
 palloyljäämä, 171
 paluuosoite, proseduurikutsun, 314
 pariteettitarkistus, 309
 perigeum, 134–136

perigeumin argumentti, 135, 248
 perättäinen suodin, 72
 perättäinen tasointus, 86
 pienimmän neliösumman kollokaatio, 47, 86
 pienimmän neliösumman menetelmä, 13
 painotettu, 32
 pietsosähköinen anturi, 106
 piirikytkentäinen verkko, 307
 pikkuakselin puolikas, 135
 ping (komento), 311
 pino, 315
 pinokehys, 315
 pinon ylivuoto, 315
 Pohjantähti (Polaris), 4, 261
 pohjoinen-itä-ylös (koordinaatit), 6
 polarisointi, 4, 257
 myötäpäivään, 166
 vastapäivään, 166, 168
 Polynesia, 3
 poolisuus, 198
 potkurilentokone, 270
 prekessio, gyroskoopin, 105, 108, 117, 119
 prioriteetti, 317
probability of false alarm (PFA), 237
probability of missed detection (PMD), 237
 proseduurit (ohjelman komponentit), 314
 protokollapino, 309, 310
 pseudoetäisyys, 191
 määritelmä, 192
 pseudoliitti, 293
 pseudovoima, 116, 147, 290
 puhelinluettelo, 308
 puhelinverkko, 307
 pulssivalinta, 308
 putoamissuoja, kovalevyn, 291
 pyörähdysmomentti, 100
 säilyminen, 104, 138
 pyörähdysnopeus, 100
 PZ-90, 257
 päivitysaskel, Kalmanin suotimen, 70, 270, 285
 päivitysyhtälö, Kalmanin suotimen, 71, 188
 pääakselit, symmetrisen tensorin, 101

Q

Quasi-Zenith Satellite System (QZSS), 247

R

radanmäärittäminen, 202
Radio Data System (RDS), 229
 Radio Technical Commission for Maritime Services (RTCM), 210
 radioyhteys, 209
 rakennematriisi, 28, 69, 87



Ranging and Integrity Monitoring
Station (RIMS), 245

rata-alkiot

Keplerin rata, 134–136
oskuloivat, 136

rataliike

Keplerin, 61
ympyrä, 61

ratkaisukorkeus (DH), 241

redundanssi, 237

regressio, 24

rektaskensio, 135

Remondi, Benjamin, 208

rendezvous, 13, 51, 143, 156, 157

Kuun kiertoradalla, 51, 52

rengaslasergyroskooppi, 109

risteilyohjus, 2

ristidipoliantenni, 166, 167, 169

ristikorrelaatio

määritelmä, 34

syklinen, 174

ristikovarianssi, 34, 35

määritelmä, 33

roskankeruu, 316

Royal Society of London, 97

RTCM Special Commission 104, 210

RTK, *katso* tosiaikainen kinemaattinen
paikannus (RTK)

rullaus (ilmailu), 8

ryhmälähetys, 210

ryhmäviive, 197

S

saapumisaikaeron menetelmä (TDOA),
289

saapumisajan menetelmä (TOA), 289

Saastamoisen malli, 198, 201

safety of life, 241, 255

safety-of-life-palvelu (Galileo/EGNOS),
261

Sagnac, Georges, 109

Sagnacin ilmiö, 109, 166

salaus, 171

samanaikaisuus (suhteellisuusteoria), 166

satelliittipaikannus, 1, 5, 6

satelliittipohjainen parannusjärjestelmä
(SBAS), 201, 235

satelliittirata, 13, 133

periodi, 121, 134

satellite-to-satellite tracking

high-low, 273

low-low, 273

sattuman anturi, 14, 275

satunnaiskulku, 38, 42, 43, 64, 203

epästationaarisuus, 39

Schuler, Maximilian, 120

Schulerin heiluri, 120, 122, 123, 125

Schulerin silmukka, 117, 122, 123, 125

Schulerin viritys, 112

seisova aalto, 109

sekoittaminen, signaalien, 182, 183

semivariogrammi, 186

sensuuri, 311

siemen (LFSR), 301

signaali (prosessi), 83

signaalikovarianssifunktio, 231

signaalin vahvuus, 289

signaalinkäsittely, 51

signaalivarianssi, 231

Signal (sovellus), 308

sijoitus, muuttujaan, 315

sikari, 221, 222

SISNeT (sovellus), 252

Sky Map (Androidin sovellus), 276

SkyView (sovellus), 282

Sodänkylä, 206

solmu, nouseva, 134–136, 155

solutunnus, 289

spektraalisuodatus, 84

spektri, stokastisen prosessin, 43

Spirit (Mars-mönkijä), 313

spoofing, 164

state vector, *katso* tilavektori

stationaarisuus, 17, 33, 34

stokastinen muuttuja

määritelmä, 15

diskreetti, 15

jatkuva, 16

vektori, 16

stokastinen prosessi, 12, 15, 17, 55

stratosfääri, 197

suihkuruori, 6

sukupolvi, matkapuhelinteknologian, 311

sulkuvirhe, päivitysaskkeen, 71, 77

suora vaihe (modulaatio), 163, 164

suoratoisto, 212

suorituspino, 314

suuntanumero, 308

suurten lukujen laki, 19, 34

syklinen redundanssitarkistus (CRC), 309

syklinen siirto, 172, 174

symbolinen laskenta, 45, 74

Synchronized Position Attitude

Navigation (SPAN), 286

syöttöakseli (gyroskooppi), 105, 111, 118

säätiede, 51

säätötekniikka, 51

T

taajuus, 44

taajuusjakokanavointi (FDMA), 256

taajuusmodulaatio, 305



taajuuspoikkeama, 185
 normalisoitu, 185
 taitekerroin, 198
 taloustiede, 51
 tarkka absoluuttinen paikannus (PPP), 171
 tarkkuuden laimennus (DOP), 195, 237
 tarkkuuspalvelu (Galileo), 261
 tasaaja, 184
 taustapalveluprosessi (*daemon*), 314
 tavallinen differentiaaliyhtälö, 55
 tehollinen otoskoko, 26, 32
 tehon spektraalitiheys (PSD), 43
 BOC, 180
 Gaussin ja Markovin prosessi, 46
 GPS-signaali, 177
 valkoinen kohina, 47
 telemetria, 305
 Telstar (satelliitti), 308
 tennismailalause, 132
 teollisuuskone, 78
 terrestrinen koordinaatisto, 8
 testisuure (RAIM), 236
 tiedostojärjestelmä, 314
 tiedostokahva, 313
 tietoyhteys, 209
 tilan ennustaminen, 57
 tilan estimaattori, 57
 a posteriori, 58
 a priori, 58
 tilansiirtomatriisi, 62
 tilastollinen malli, 13, 28
 tilastollinen testaus, 236
 tilavarianssi, 221
 päivitys, 70
 tilavarianssimatriisi,
 kokonaistuntemattomien, 221
 tilavektori, 51, 53, 55, 134, 136
 määritelmä, 53
 tilavektorin varianssi
 määritelmä, 61
 tilde ~, 98
 TMBOC, 255
 todennus, 171
 todennäköisyystiheys, 16, 18
 kumulatiivinen, 16, 18
 toimilaite, 107, 117, 118, 122
 toisen lajin virhe, 237
 toisto-ominaisuus
 barysentristen koordinaattien, 228
 deltafunktion, 37, 47
 Tom ja Jerry, 273
 toposentrinen koordinaatisto, 6, 112
 tosiaikainen kinemaattinen paikannus (RTK), 11, 207, 215, 287
 tosiaikaisuus

määritelmä, 305
 kova, 313, 318
 käytön edellytykset, 318
 Transit (satelliittipaikannusjärjestelmä), 5
 transitiivisuus, 62, 68, 74
 Transmission Control Protocol (TCP), 251, 309, 312
 transponderi, 238, 242
 Trimnet VRS (Geotrim), 210
 tukiasema, 206, 211
 tukilohko (EGNOS), 245
 Tundran kiertorata, 248
 tuntematon, 27
 turvatyyne, auton, 291
 Twin Otter, 270
 Tyynimeri, 3
 tyyppikoodaus, paikkatiedon, 11
 tähtiaika, Greenwichin, 113, 135, 142
 tähtitieteellinen koordinaatisto, 141
 täsmälähetys, 210, 230

U

"ultraviolettikatastrofi", 47
 UNIX, 308
Ursa Major, 261
 User Datagram Protocol (UDP), 311
 UTC(SU), 257

V

V-2, 6, 7
 vahvistusmatriisi, Kalmanin, 70, 92
 vaihekatko, 11, 189, 208, 216, 289
 vaihekelaus, 169, 170
 vaihekulman erotin, 183
 vaihelukittu silmukka (PLL), 183
 vaihemodulaatio, 162, 257, 305
 vaihepoikkeama, 185
 vaihetuettu koodimittaus, 187
 vaiheviivekuvio, GNSS-antennin, 207
 vaimennus, gravimetrisin, 267
 vaimennuskerroin, 120
 vakautettu alusta
 määritelmä, 110
 gravimetrille, 267
 kuva, 118
 paikallinen horisontti, 117
 tasaus, 117
 valkoinen kohina, 28, 36, 43, 56, 64
 valkoinen valo, 36
 valkoposkihanhi, 4
 valokuitu, 110
 valvontalohko (GPS), 159, 160
 Vandenberg (Kalifornia), 160
 vapaan atsimuutin ratkaisu, 131
 vapaasti pyörivä kappale, 103
 vapausaste, 29, 55, 237



varianssi, *määritelmä*, 19
 varianssiellipsi, 73
 varianssifunktio, 33
 vastaanottimen itsenäinen eheyden
 valvonta (RAIM), 235, 241, 261
 vasteaika, 251, 305, 312
 vastus, ilmakehän, 58, 273
 Weisstein, Eric, 22
 verkko, geodeettinen, 170, 171
 vertausellipsoidi, 12, 267
 vertauskehys, 6
 vertausoskillaattori, 193
 vesihöyry, 198
 vetovoimakenttä, 58
 WGS84, 9
 WhatsApp (sovellus), 308
 Wide Area Augmentation System
 (WAAS), 238, 242, 243
 Wide Area Master Station (WMS), 243
 Wide Area Reference Station (WRS), 243
 Wiener, Norbert, 38
 Wienerin prosessi, 38
 Wienerin, Khinchinin ja Einsteinin lause,
 43
 viivelukittu silmukka (DLL), 182
 viranomaispalvelu (Galileo), 261
 virhe-ellipsi, 22, 23, 72
 virtatihentymä, ekvatoriaalinen, 250, 251
 virtuaalitukiasema (VRS), 230
 Wolfram Research, 45
 Woodburyn yhtälö, 85, 303
 World Radiocommunications Conference,
 260
 votiivilaiva, 2
 vuorokauden pituus (LoD), 202
 vuoronnus, 317
 vuorontaja, 314
 vuoronvaihto, 317, 318
 väliakselilause, 132
 välitaajuus, 182
 värillinen kohina, 39, 41, 83, 84
 värähtely, 107
 värähtely-yhtälö, 120, 121
 vääntö, 109, 124
 vääntömomentti, 100
 vääntötoimilaite, 108, 112
 väärä hälytys, 237

X

XOR-operaatio, 172
 XOR-portti, 172

Y

yhdeksänmenetelmä, 309
 yhden vapausasteen gyroskooppi, 110
 yleislähetys, 210, 229

ylikuuluminen, 182
 ympyräkonvoluutio, 35
 ympyräpolarisointi, 165, 167–169

Z

zeniitin kokonaisviive (ZTD), 199, 231
 zeniittikulma, 167, 171

Ä

älyammus, 291
 äänirauta, 291, 292
 äänivalinta, 308



